

M. Gottschalk
Frankfurt #1977



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550826_0012

Verallgemeinerung eines Hardy-Littlewoodschen
Problems und verwandte Fragestellungen

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der Naturwissenschaften

vorgelegt dem Fachbereich Mathematik

der Johann Wolfgang Goethe - Universität

in Frankfurt am Main

von Manfred Gottschalk

aus Frankfurt - Höchst

Frankfurt am Main 1976

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs
Mathematik der Johann Wolfgang Goethe -
Universität Frankfurt am Main.

Dekan: Prof. Dr. J. Weidmann

1. Berichterstatter: Prof. Dr. W. Schwarz

2. Berichterstatter: Prof. Dr. W. Franz

Tag der mündlichen Prüfung: 19. April 1977

Tag der Promotion: 19. April 1977



Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	iii
I Einleitung	
1.1 Die Hardy-Littlewoodsche Vermutung	1
1.2 Formulierung der Ergebnisse und Übersicht	6
II Beweis der Sätze 1 und 2	
2.1 Hilfssätze	16
2.2 Die Summe Σ_A	28
2.3 Die Summe Σ_C	32
2.4 Die Summe Σ_B	39
2.5 Zusammenfassung der Zwischenresultate	54
III Der Bombieri-Satz für B-Zahlen	
3.1 Hilfssätze	57
3.2 Beweis des Satzes 4	60
IV Beweis von Satz 3	
4.1 Hilfssätze	70
4.2 Die Summen Σ_A und Σ_C	82
4.3 Die Restgliedabschätzung	85
4.4 Herleitung von Satz 3	93
V Beweis von Satz 5	94
Literaturverzeichnis	100

Bezeichnungen

Mit p bezeichnen wir stets Primzahlen. s ist komplex mit $\operatorname{Re}(s) = \sigma$ und $\operatorname{Im}(s) = t$. $x_1 = \exp(\ln^{\xi_0} x)$, wobei $\xi_0 (> 0)$ beliebig klein gewählt werden darf.

Es werden folgende Symbole und Funktionen verwendet:

$|$ teilt, $\nmid$ teilt nicht, $\parallel$ teilt genau,

$(,)$ ggT, $[,]$ kgV,

$[x]$ größte ganze Zahl unterhalb von x ,

$\mu(.)$ Moebius'sche Funktion,

$\varphi(.)$ Euler'sche Funktion,

$$d(n) = \sum_{d|n} 1,$$

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d,$$

$$r(n) = 4\delta(n) = 4 \sum_{1|n} \chi(1),$$

χ ist der Nicht-Hauptcharakter modulo 4,

(Im Kapitel III bezeichnet χ einen beliebigen Charakter mod k und χ_4 den Nicht-Hauptcharakter modulo 4.)

$\omega(n)$ = Anzahl der verschiedenen Primteiler von n ,

$\Omega(n)$ = Anzahl der Primteiler von n ,

$b(.)$ = charakteristische Funktion der B-Zahlen,

$\operatorname{li} x$ = Integrallogarithmus,

$$\pi(x; k, b) = \#\{ p \leq x \mid p \equiv b \pmod{k} \},$$

$\#$ Anzahl.

I. Einleitung

1.1 Die Hardy-Littlewoodsche Vermutung

In ihrer berühmten Arbeit "Some problems of partitionum III" [14] stellten Hardy und Littlewood die Vermutung auf, daß jede hinreichend große natürliche Zahl n in der Form

$$(1.1.1) \quad n = p + u^2 + v^2$$

darstellbar ist, wobei p eine Primzahl und u, v ganze Zahlen sind. Mit Hilfe von heuristischen Betrachtungen (formale Anwendung der Kreismethode ohne Restgliedabschätzungen) gaben sie eine asymptotische Formel für die Anzahl $A(n)$ der Lösungen von (1.1.1) an.

$$(1.1.2) \quad A(n) \sim \pi \frac{n}{\ln n} \prod_p \left(1 + \frac{\chi(p)}{p(p-1)}\right) \cdot \prod_{p|n} \frac{(p-1)(p-\chi(p))}{p^2 - p + \chi(p)}.$$

In einer weiteren Arbeit ([15]) wiesen Hardy und Littlewood darauf hin, daß es mit der erweiterten Riemannschen Vermutung (Hypothese R) möglich sein müßte, die Darstellbarkeit von n in der Gestalt (1.1.1)

für "fast alle" natürlichen Zahlen zu zeigen. In ihrer Arbeit [25] aus dem Jahre 1928 führte Miss Stanley diesen Beweis aus. Weitere Arbeiten, wie die von Chowla [4], Walfisz [26], Estermann [7] und Halberstam [13] schlossen sich dieser Veröffentlichung an. Für das ursprüngliche Problem wurden aber keine Fortschritte erzielt.

Erst 1957 konnte Hooley [16] unter der Voraussetzung, daß

$$(1.1.3) \quad \max_{(1,k)=1} \left| \pi(y; k, 1) - \frac{\text{li } y}{\varphi(k)} \right| \ll y^{1/2} \ln 2y$$

gilt, das Problem lösen. (Die Abschätzung (1.1.3) ist eine direkte Folgerung aus der Hypothese R).

Er benutzte dabei die Darstellung

$$(1.1.4) \quad A(n) = \sum_{p < n} r(n - p) \quad *)$$

Zur Berechnung des Hauptgliedes (siehe (1.1.2)) mußte er allerdings die Abschätzung (1.1.3) verwenden, die unbewiesen ist. Seine Hauptleistung bestand darin, das Restglied ohne Benutzung einer unbewiesenen Vermutung hinreichend gut abzuschätzen.

*) $r(m) = \sum_{x^2 + y^2 = m} 1 = 4 \sum_{d|m} \chi(d)$, $\chi =$ Nicht-Hauptcharakter modulo 4 .

Hierzu zeigte er ein Sieblemma, in dem er die Anzahl der Quasiprimzahlen (wie Linnik sie nennt) in einer arithmetischen Progression asymptotisch auswertete. *) Hiermit konnten dann die Vorzeichenwechsel von χ bei der Abschätzung gewisser Summen ausgenutzt werden.

Die Lösung des Problems, frei von jeder Vermutung, gelang Linnik [19] 1960. Er betrachtete ebenfalls die Summe (1.1.4) und konnte die Abschätzung (1.1.3) mit Hilfe seiner (allerdings sehr komplizierten) Dispersionsmethode umgehen. Bei der Restgliedabschätzung stützte er sich wesentlich auf die Arbeit von Hooley [16]. 1963 verbesserte Bredikhin [2] schließlich das Hooleysche Restglied, indem er in dessen Methode mit Hilfe eines Lemmas von Erdős eine bessere Abschätzung erhielt. Der 1964 gefundene Satz von Bombieri ermöglichte es Elliott und Halberstam schließlich 1966, die Abschätzung (1.1.3) im Beweis von Hooley zu umgehen. Damit hatte man endlich einen einfacheren und eleganteren Weg zur Berechnung des Hauptgliedes gefunden, da man nun die Dispersionsmethode nicht mehr benötigte.

Linnik und seine Schule betrachteten schließlich das allgemeinere Problem

*) mehr darüber im Abschnitt 2.1 (Lemma 2.8)

$$(1.1.5) \quad p + \Phi(u, v) = n,$$

wobei Φ eine binäre quadratische Form ist. Ein typisches Ergebnis findet man zum Beispiel bei Bredikhin [3]. In Theorem 5.1.1 wird dort eine untere Abschätzung für die Anzahl der Lösungen von (1.1.5) gegeben, falls die Diskriminate von Φ kein perfektes Quadrat ist. Weitere Arbeiten beschäftigen sich mit Summen, die vom ähnlichen Typ wie (1.1.4) sind. Linnik [20] und Poljanskiĭ [21] gaben zum Beispiel für

$$(1.1.6) \quad \sum_{p_1 p_2 < n} r(n - p_1 p_2),$$

Kátai [18] für

$$(1.1.7) \quad \sum_{p \leq x} r(p+a) |\mu(p+a)|$$

und

$$(1.1.8) \quad \sum_{p < n} r(n-p) |\mu(n-p)|$$

asymptotische Formeln an, wobei sie die Hooleysche Methode zur Abschätzung des Restgliedes benutzten.

Hooley selbst betrachtete in seiner Arbeit [16] auch die zu (1.1.4) konjugierte Summe

$$(1.1.9) \quad \sum_{0 < p - a \leq x} r(p-a) \quad (a \neq 0 \text{ ganz})$$

Mit der gleichen Methode wie beim Beweis von (1.1.4) erhielt er eine asymptotische Formel mit Restglied. In [9] betrachtete der Verfasser dieser Arbeit die allgemeinere Summe

$$(1.1.10) \quad \sum_{\substack{0 < p - a \leq x \\ p \equiv b \pmod{k}}} r(p-a)$$

In dieser Arbeit soll im 1. Kapitel II die noch allgemeinere Summe

$$(1.1.11) \quad \sum_{\substack{0 < p - a \leq x \\ p \equiv b \pmod{k} \\ p-a \equiv 0 \pmod{d}}} r\left(\frac{p-a}{d}\right)$$

behandelt werden. Weiter wird unter anderem in Kapitel IV eine asymptotische Formel mit Restglied für

$$(1.1.12) \quad \sum_{0 < v - a \leq x} b(v) r(v-a)$$

hergeleitet, wobei $b(\cdot)$ die charakteristische Funktion der B-Zahlen ist, d.h. der Zahlen, die sich als Summe zweier Quadrate ganzer Zahlen darstellen lassen.

1.2 Formulierung der Ergebnisse und Übersicht

Wie im Abschnitt 1.1 erwähnt wurde, soll in dieser Arbeit die Summe

$$\sum_{\substack{0 < p-a \leq x \\ p \equiv b \pmod{k} \\ p-a \equiv 0 \pmod{d}}} r\left(\frac{p-a}{d}\right)$$

behandelt werden, d.h. wir bestimmen die Anzahl $A(x)$ der Lösungen von

$$(1.2.1) \quad \begin{aligned} p &= a + d(u^2 + v^2) \\ p &\equiv b \pmod{k} \end{aligned}$$

mit $p \leq x + a$.

Es zeigt sich, daß zwischen den Fällen $4 \nmid k$ und $4 \mid k$ unterschieden werden muß. Wir formulieren daher die Ergebnisse in zwei Sätzen.

Satz 1. Zu vorgegebenem $a \neq 0$ und reellem $T > 0$

ist für alle natürlichen k und d mit $4 \nmid k$, $(d, 2ka)=1$,

$kd \leq \ln^T x$ und alle zu k teilerfremden b

$$(1.2.2) \quad \sum_{\substack{0 < p-a \leq x \\ p \equiv b \pmod{k} \\ p-a \equiv 0 \pmod{d}}} r\left(\frac{p-a}{d}\right)$$

$$= \frac{C(d, k, a)}{\varphi(k) \varphi(d)} \frac{x}{\ln x} + O(\chi(k) \frac{x}{d \ln^{1+\lambda} x}),$$

wobei

$$\chi(k) = \min\left(\frac{\sigma((b-a, k))^{1/2}}{\varphi(k)^{1/2}}, 1\right)$$

und $\lambda = 0,042$ ist.

Das Restglied kann für jedes $\epsilon > 0$ mit $\epsilon' = \epsilon'(\epsilon) > 0$ durch

$$O\left(\frac{\sigma((b-a, k))^{1/2}}{\varphi(k)^{1-\epsilon} d} \frac{x}{\ln^{1+\epsilon'} x}\right)$$

ersetzt werden. Die 0-Konstanten sind bei beiden Restgliedern unabhängig von k und d . *)

Satz 2. Wenn $4 \mid k$, so gilt mit den gleichen Voraussetzungen wie in Satz 1

$$(1.2.3) \quad \sum_{\substack{0 < p-a \leq x \\ p \equiv b \pmod{k} \\ p-a \equiv 0 \pmod{d}}} r\left(\frac{p-a}{d}\right) =$$

*) Die explizite Gestalt der Konstanten in den Hauptgliedern der Sätze 1 und 2 kann Abschnitt 2.5 entnommen werden.

$$= \frac{C^*(d, k, a)}{\varphi(k)\varphi(d)} \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{d \cdot \ln^{1+\lambda} x}\right)$$

Das Restglied kann wie im Satz 1 durch

$$O\left(\frac{1}{\varphi(k)^{1/2 - \epsilon_d}} \frac{x}{\ln^{1+\epsilon'} x}\right)$$

ersetzt werden.

Aus beiden Sätzen ergibt sich folgendes Korollar.

Korollar. Sei $a \not\equiv 0$ ganz, d, k, b natürlich mit

$(d, 2ka)=1$ und $(b, k)=1$. Dann gilt:

Existiert in der Restklasse $b \pmod{k}$ mindestens eine Primzahl der Form $p = a + d(u^2 + v^2)$, so gibt es unendlich viele, die in dieser Gestalt darstellbar sind.

Bemerkung 1. Für $k = b = d = 1$ erhalten wir aus Satz 1 das Ergebnis (1.1.9) von Hooley mit dem von Bredikhin verbesserten Restglied.

Bemerkung 2. Für $d = 1$ folgt aus den Sätzen 1 und 2 das Ergebnis (1.1.10) des Verfassers mit einem in k schärferen Restglied.

Bemerkung 3. Für das konjugierte Problem in (1.1.5)

mit unserer binären quadratischen Form gibt Satz 1 (mit $k = b = 1$) eine asymptotische Formel mit Restglied und nicht nur eine untere Abschätzung.

Als nächstes formulieren wir das (1.1.9) entsprechende Ergebnis für B-Zahlen. Um später die Rechnungen etwas kürzer zu halten, schränken wir uns auf den Fall $a = -1$ und zeigen

Satz 3. Mit $\lambda = 0,042$ gilt

$$\sum_{1 < v \leq x} r(v-1) b(v)$$

$$(1.2.4) \quad = \pi \prod_{p \equiv 3 \pmod{4}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \frac{x}{\ln^{1/2} x} + O\left(\frac{x}{\ln^{1/2+\lambda} x}\right).$$

Bemerkung. $r(n)$ ist genau dann von Null verschieden, wenn $b(n) \neq 0$ ist. In (1.2.4) tragen deswegen nur diejenigen Zahlen v etwas zur Summe bei, für die gleichzeitig $b(v)$ und $b(v-1)$ ungleich Null ist. Solche Paare $(v-1, v)$ nennt man B-Zwillinge. Wir können ähnlich wie bei dem Korollar zu Satz 1 und 2 aus (1.2.4)

folgern;

Es existieren unendlich viele B-Zwillinge.

Weiter zeigt man mit (1.2.4)

Korollar. Die Anzahl $B_2(x)$ der B-Zwillinge unterhalb von x genügt für $x \rightarrow \infty$ der Abschätzung

$$(1.2.5) \quad B_2(x) \gg_{\epsilon} x(\ln x)^{-(1/2 + \ln 2 + \epsilon)}$$

mit $\epsilon > 0$.

Mit Siebmethoden läßt sich die Abschätzung (1.2.5) verschärfen und sogar die genaue Größenordnung von $B_2(x)$ bestimmen (Indlekofer [17]).

Wir wollen nun die Beweise dieser drei Sätze kurz skizzieren. Dazu formulieren wir das Hardy-Littlewood-Problem allgemeiner.

Sei $\mathcal{G}$ eine Teilmenge der natürlichen Zahlen und

$$(1.2.6) \quad S(\mathcal{G}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{G}} r(\alpha) .$$

Dann erhalten wir zum Beispiel mit $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 = \{p-a \mid p-a \leq x\}$ das Problem (1.1.9), oder mit geeigneter Wahl von $\mathcal{G}$ die Summen (1.2.2), (1.2.3) bzw. (1.2.4).

$S(\mathcal{G})$ teilen wir nun folgendermaßen in Teilsummen auf

$$S(\mathbb{Q}) = 4 \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} \sum_{1|\alpha} \chi(1)$$

$$\begin{aligned} (1.2.7) &= 4 \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} \left\{ \sum_{\substack{1|\alpha \\ 1 \leq x^{1/2} x_1^{-1}}} \chi(1) \right. \\ &\quad + \sum_{\substack{1|\alpha \\ x^{1/2} x_1^{-1} < 1 < x^{1/2} x_1}} \chi(1) + \sum_{\substack{1|\alpha \\ 1 \geq x^{1/2} x_1}} \chi(1) \left. \right\} \\ &= 4 \{ \Sigma_A(\mathbb{Q}) + \Sigma_B(\mathbb{Q}) + \Sigma_C(\mathbb{Q}) \}, \end{aligned}$$

wobei $x_1 = \exp(\ln^{\xi_0} x)$ gesetzt wurde.

Kann man die Summe $S(\mathbb{Q})$ mit der Hooley'schen Methode behandeln, d.h. die Summe $\Sigma_B(\mathbb{Q})$ abschätzen, so benötigt man zur Auswertung von $\Sigma_A(\mathbb{Q})$ und $\Sigma_C(\mathbb{Q})$ einen Satz vom Bombieri-Typ, der die mittlere Verteilung der Zahlen $\alpha \in \mathbb{Q}$ in Restklassen beschreibt. Wählen wir zum Beispiel die spezielle Menge

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_2 = \left\{ \frac{p-a}{d} \mid p-a \equiv 0 \pmod{d}, p \equiv b \pmod{k}, 0 < p-a \leq x \right\}$$

($S(\mathbb{Q}_2)$ ist dann die Summe, welche in den Sätzen 1 und 2 behandelt wird), so können wir den schon bekannten Satz von Bombieri benutzen.

Für die Wahl

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_3 = \{b-1 \mid b \text{ ist B-Zahl mit } 1 \leq b \leq x\}$$

(d.h. die in Satz 3 betrachtete Zahlenfolge) formulieren wir diesen Mittelwertsatz später als Satz 4. Die Summe $\Sigma_A(\mathcal{G})$ liefert dann im allgemeinen das Hauptglied der asymptotischen Formel für $S(\mathcal{G})$, während die Summe $\Sigma_C(\mathcal{G})$ im Restglied aufgeht. Dies ist auch bei den von uns betrachteten Mengen $\mathcal{G}_2$ (für $4 \nmid k$) und $\mathcal{G}_3$ der Fall. Für $\mathcal{G}_2$ mit $4 \mid k$ zeigt sich, daß die Summe $\Sigma_C(\mathcal{G}_2)$ in gewissen Fällen von gleicher Größenordnung wie $\Sigma_A(\mathcal{G}_2)$ ist. Deshalb ist $S(\mathcal{G}_2)$ für $4 \mid k$ wesentlich schwieriger auszuwerten.

Bei den Beweisen der Sätze 1-3 muß man allerdings die speziellen Eigenschaften der Mengen $\mathcal{G}_i$ ($i=1,3$) berücksichtigen, d.h. wir müssen sie getrennt durchführen. Die Berechnung von $\Sigma_A(\mathcal{G}_i)$ und $\Sigma_C(\mathcal{G}_i)$ für $i=2$ wird in den Abschnitten 2.2 und 2.3, für $i=3$ im Abschnitt 4.2 durchgeführt. Die Hilfssätze die hierfür benötigt werden, findet man in 2.1 und 4.1.

Mit der Hooleyschen Methode werden wir $\Sigma_B(\mathcal{G}_i)$ ($i=2,3$) in den Abschnitten 2.4 ($i=2$) und 4.3 ($i=3$) abschätzen, wobei wir die Menge $\mathcal{G}_3$ noch geeignet modifizieren müssen. Wir werden dabei diese Methode in einer technisch etwas weniger komplizierten Form verwenden (Verzicht auf die Lemmata 8 und 9 bei Hooley [16], dafür die einfacheren Lemmata 2.9 für $i=2$ bzw. 4.4 für $i=3$).

Als nächstes formulieren wir den Bombierischen Satz für B-Zahlen.

Satz 4. Zu vorgegebenem $A > 0$ existiert eine Konstante $B = B(A) > 0$ mit

$$\sum_{\substack{k \leq \frac{x^{1/2}}{\ln^B x} \\ 4 \nmid k}} \max_{(1,k)=1} \max_{y \leq x} \left| \sum_{\substack{n \leq y \\ n \equiv 1 \pmod{k}}} b(n) - \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{n \leq y \\ (n,k)=1}} b(n) \right|$$

$$+ \sum_{\substack{k \leq \frac{x^{1/2}}{\ln^B x} \\ 4 \mid k}} \max_{j=1,3} \max_{1 \equiv j \pmod{4}} \max_{y \leq x} \left| \sum_{\substack{n \leq y \\ n \equiv 1 \pmod{k}}} b(n) - \frac{2}{\varphi(k)} \sum_{\substack{n \leq y \\ (n,k)=1 \\ n \equiv j \pmod{4}}} b(n) \right|.$$

Bemerkung. Auch hier mußte wieder zwischen $4 \mid k$ und $4 \nmid k$ unterschieden werden. Im Falle $4 \mid k$ existiert stets ein $\chi' \pmod{k}$ mit $\chi' \chi_4 = \chi_0$ (χ_4 Nicht-Hauptcharakter modulo 4, χ_0 Hauptcharakter modulo k), was den Faktor $\frac{2}{\varphi(k)}$ in der zweiten Summe erklärt.

Mittelwertsätze dieser Art wurden unter anderem von

$$\sum_{k \leq x} B(k; m_1, \dots, m_r) = C(m_1, \dots, m_r) x^{r+2} + O_{(m_1, \dots, m_r)}(x^{r+1} \ln^{r+1} x).$$

Bemerkung 1. Für den Fall $r=1$ bewies F. Fricker in [8] die Abschätzung

$$c_1 m_1 x^3 < \sum_{k \leq x} B(x, m_1) < c_2 m_1 x^3 \ln \ln x,$$

wobei c_1 und c_2 positive Konstanten sind.

Bemerkung 2. Das diophantische Gleichungssystem (1.2.8) besitzt im Gegensatz zu (1.2.1) stets Lösungen, d.h. in diesem binären Problem ist eine Aussage wie in dem Korollar zu den Sätzen 1 und 2 trivial.

Der Beweis von Satz 5 *) kann elementar durchgeführt werden.

*) Die hier formulierten Sätze 1-5 sind in [10], [11] und [12] zu finden.

II. Beweis der Sätze 1 und 2

2.1 Hilfssätze

Bezeichnen wir mit

$$\mathfrak{E}(x, k) = \max_{(k, l)=1} \max_{1 < y \leq x} \left| \pi(y; k, l) - \frac{\text{li } y}{\phi(k)} \right| ,$$

so gilt

Lemma 2.1 (Bombieri [1]). Zu vorgegebenem $A > 0$ existiert eine positive Konstante $B = B(A)$ mit

$$\sum_{k \leq x^{1/2}} \mathfrak{E}(x, k) \ll \frac{x}{\ln^A x} .$$

Als nächstes zitieren wir ein Lemma von Hooley ([16], S.192).

Lemma 2.2 Für ganzes $a \neq 0$ ist

$$\sum_{\substack{1 \leq y \\ (1, a)=1}} \frac{\chi(1)}{1} = \frac{\pi}{4} \prod_{p|a} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p} \right) + O(y^{-1} d(a, y)) \\ + O(\sigma_{-1}(a; y)) ,$$

$$\text{wobei } d(n, y) = \sum_{\substack{d|n \\ d \leq y}} 1 \quad \text{und} \quad \sigma_{-1}(n; y) = \sum_{\substack{d|n \\ d > y}} \frac{1}{d}$$

gesetzt wurde.

Lemma 2.3 Sei $a \neq 0$ ganz. Dann gilt für natürliches k

$$\sum_{\substack{1 \leq y \\ (1, a) = 1}} \frac{\chi(1)}{\varphi(1, k)} = \frac{\pi}{4\varphi(k)} C_1 E(a, k) \prod_{\substack{p|k \\ (p, a) = 1}} \frac{p}{p - \chi(p)} + O(d(a) (k \cdot y)^{-1} \ln 2ky)$$

mit den Konstanten

$$C_1 = \prod_p \left(1 + \frac{\chi(p)}{p(p-1)} \right)$$

und

$$E(n) = \prod_{\substack{p|n \\ p > 2}} \frac{(p-1)(p-\chi(p))}{p^2 - p + \chi(p)}.$$

Beweis. Mit

$$\frac{1 \cdot k}{\varphi(1 \cdot k)} = \sum_{1' | 1 \cdot k} \frac{\mu^2(1')}{\varphi(1')}$$

folgt

$$\sum_{\substack{1 \leq y \\ (1,a)=1}} \frac{\chi(1)}{\varphi(1 \cdot k)} = \frac{1}{k} \sum_{\substack{1 \leq yk \\ (\frac{1}{1,k},a)=1}} \frac{\mu^2(1)(1,k)\chi(1(1,k)^{-1})}{\varphi(1) \cdot 1}$$

$$\sum_{\substack{m \leq y(1,k)l^{-1} \\ (m,a)=1}} \frac{\chi(m)}{m} \cdot$$

Ersetzen der inneren Summe durch die asymptotische Formel aus Lemma 2.2 und einige einfache Abschätzungen ergeben

$$\sum_{\substack{1 \leq y \\ (1,a)=1}} \frac{\chi(1)}{\varphi(1 \cdot k)} = \frac{\pi}{4 \cdot k} \prod_{p|a} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p-1} \right) \sum_{(\frac{1}{1,k},a)=1}$$

$$\frac{\mu^2(1)(1,k)\chi(1(1,k)^{-1})}{\varphi(1) \cdot 1} + O(d(a) \cdot (k \cdot y)^{-1} \ln(2ky)) \cdot$$

Entwicklung der verbleibenden Summe in ein Produkt liefert die behauptete asymptotische Gleichung.

Bevor wir Lemma 2.4 formulieren, müssen wir einige Mengen definieren.

$$\begin{aligned}
 (p_1) &= \{p \equiv 1 \pmod{4} \mid p^m \parallel (k, a) \Rightarrow p^m \parallel k\} \\
 (p_2) &= \{p \equiv 3 \pmod{4} \mid p^{2m+1} \parallel (k, a) \Rightarrow p^{2m+1} \parallel k\} \\
 (p_3) &= \{p \equiv 3 \pmod{4} \mid p^{2m} \parallel (k, a) \Rightarrow p^{2m} \parallel k\} \\
 (q_1) &= \{p \equiv 1 \pmod{4} \mid p^m \parallel (k, a) \Rightarrow p^{m+1} \mid k\} \\
 (q_2) &= \{p \equiv 3 \pmod{4} \mid p^{2m+1} \parallel (k, a) \Rightarrow p^{2m+2} \mid k\} \\
 (q_3) &= \{p \equiv 3 \pmod{4} \mid p^{2m} \parallel (k, a) \Rightarrow p^{2m+1} \mid k\} .
 \end{aligned}$$

Hiermit läßt sich die Primfaktorzerlegung von (k, a) folgendermaßen darstellen

$$\begin{aligned}
 (k, a) &= 2^\lambda \prod_{i=1}^3 \left(\prod_{(p_i)} p^{\beta(p)} \right) \prod_{j=1}^3 \left(\prod_{(q_j)} p^{\gamma(p)} \right) \\
 (2.1.2) \\
 &= 2^\lambda \prod_{i=1}^3 p_i \prod_{j=1}^3 q_j .
 \end{aligned}$$

Mit diesen Abkürzungen gilt

Lemma 2.4 Für ganzes $a \neq 0$ und natürliches k gilt

(2.1.2)

$$\sum_{m \mid (k, a)} \chi(m) \prod_{\substack{p \mid m \\ p \nmid k \cdot m^{-1}}} \left(\frac{p}{p - \chi(p)} \right) = c_2(k; (k, a)) ,$$

wobei

$$c_2(k; (k, a)) = \delta(Q_1) \delta(Q_2) \prod_{p|P_2} \left(\frac{1}{p+1} \right) \prod_{p|P_3} \left(\frac{p}{p+1} \right) .$$

*)

$$\cdot \left\{ \sum_{m|\alpha(P_1)} \prod_{p|m} \left(\frac{p}{p-1} \right) \delta \left(\frac{P_1^m}{\prod_{p|m} p^{\beta(p)} \alpha(P_1)} \right) \right.$$

ist.

Bemerkung 1. Es ist

$$c_2(k, (k, a)) \left\{ \begin{array}{l} = 0, \text{ falls } (q_2) \text{ nicht leer} \\ > 0, \text{ sonst} \end{array} \right. .$$

Bemerkung 2. Man beachte, daß das Produkt $\prod_{p|m} \left(\frac{p}{p - \chi(p)} \right)$
 $p \nmid k \cdot m^{-1}$
keine multiplikative Funktion in m ist.

Beweis. Man überlegt sich leicht, daß die Produkte, die in der Summe (2.1.2) vorkommen, von der Form

$$(2.1.3) \quad \prod_{p|r} \left(\frac{p}{p - \chi(p)} \right)$$

mit $r|\alpha(P_1 P_2 P_3)$ sind. Ist umgekehrt r ein beliebiger Teiler von $\alpha(P_1 P_2 P_3)$, so kommt das entsprechende Produkt (2.1.3) in der Summe (2.1.2) vor. Die Zahl m hat dann die Form

*) $\alpha(n)$ bezeichne den quadratfreien Kern von n .

$$m = \prod_{p|r} p^{\beta(p)} \prod_{\substack{p|m \\ (p,r)=1}} p^{\xi(p)}.$$

(Im Fall $p|(m, \alpha(P_1 P_2 P_3) r^{-1})$ ist $\xi(p) < \beta(p)$.)

Ordnen wir die Summe (2.1.2) nach den Produkten (2.1.3), so folgt

(2.1.4)

$$\begin{aligned} & \sum_{m|(k,a)} \chi(m) \prod_{\substack{p|m \\ p \nmid k \cdot m^{-1}}} \left(\frac{p}{p - \chi(p)} \right) \\ &= \sum_{r|\alpha(P_1 P_2 P_3)} \prod_{p|r} \left(\frac{\chi(p)^{\beta(p)}}{p - \chi(p)} \right) \delta \left(\frac{(k,a)r}{\prod_{p|r} p^{\beta(p)} \alpha(P_1 P_2 P_3)} \right). \end{aligned}$$

Da $\alpha(n)$ und $\delta(n)$ multiplikative Funktionen sind, erhält man in (2.1.4)

$$\begin{aligned} (2.1.5) \quad & \delta \left(\frac{(k,a)r}{\prod_{p|r} p^{\beta(p)} \alpha(P_1 P_2 P_3)} \right) = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } r \not\equiv 0 \pmod{\alpha(P_3)} \\ \delta(Q_1) \delta(Q_2) \delta \left(\frac{P_1(r, P_1)}{\prod_{p|(r, P_1)} p^{\beta(p)} \cdot \alpha(P_1)} \right) & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Einsetzen von (2.1.5) in (2.1.4) ergibt nach einer einfachen Summenformung die Behauptung.

Lemma 2.5 Seien a_1, a_2 ganze Zahlen, $a_1 \neq 0$, r und k natürlich, $(r \cdot a_2, k) = 1$. Dann gilt mit einer geeigneten Konstanten c

$$\sum_{\substack{1 \leq y \\ (1, a_1) = 1 \\ a_1 + a_2 \equiv 0 \pmod{(1, k)}}} \frac{\chi(1) \cdot 1}{\varphi([r1, k])}$$

$$\ll d((k, a_1 + a_2)) \cdot (k, a_1 + a_2) \cdot d(r \cdot k) \cdot \varphi(rk)^{-1} d(a_1) \cdot$$

$$\cdot \ln 2y (c \cdot \ln 2y)^{\omega(r \cdot k)}.$$

Beweis. Die abzuschätzende Summe ist gleich

$$\sum_{\substack{m \mid (k, a_1 + a_2) \\ (1, k \cdot a_1 \cdot m^{-1}) = 1}} \chi(m) m \sum_{1 \leq \frac{y}{m}} \frac{\chi(1) 1}{\varphi(1 \cdot r \cdot k)}$$

Mit einer ähnlichen Überlegung wie bei Kátai [18]

(Lemma 8) folgt die Behauptung.

Die bisherigen Lemmata dienen der Berechnung der Hauptglieder von Satz 1 und 2, d.h. der Auswertung von

$$\Sigma_A \quad \text{und} \quad \Sigma_C.$$

Die nun folgenden Lemmata werden zur Abschätzung des Restgliedes benötigt.

Lemma 2.6 (Hooley [16], S.200). Für $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{4}$

$$\text{gilt} \quad \sum_{m \leq y} x^{\Omega(m)} \ll y \ln^{x-1} 2y.$$

Das nächste Lemma stammt von Erdős [6] und wurde von Bredikhin zur Verbesserung des Hooleyschen Restgliedes verwendet.

Lemma 2.7 Sei

$$A(N) = \sum_{\substack{r \leq N \\ r = l_1 l_2}} 1,$$

wobei $1 \leq l_1 \leq n_1$, $1 \leq l_2 \leq n_2$ und $N = n_1 n_2$ ($n_1, n_2 > 2$)

ist. Dann gilt

$$A(N) \ll \frac{N}{\ln n_1 \ln n_2} \ln N (\ln N)^{\gamma_0} (\ln \ln N)^3,$$

mit

$$\gamma_0 = \frac{1 + \ln \ln 2}{\ln 2} = 0,9141 \dots$$

Wir kommen nun zum zentralen Lemma der Hooley'schen Methode. Hierzu führen wir den Begriff der Quasiprimzahl ein.

Sei

$$x = y^{\frac{1}{(\ln \ln y)^2}}, \quad P = \prod_{p \leq x} p.$$

Wir definieren eine zahlentheoretische Funktion

$f(v) \equiv f_x(v)$ durch die Gleichung

$$f(v) = g(v) + h(v),$$

wobei

$$g(v) = \begin{cases} 1, & \text{falls } v \text{ eine Primzahl } \leq x \text{ ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$h(v) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (v, P) = 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

gesetzt wurde.

$f(\cdot)$ ist die charakteristische Funktion einer Teilmenge der natürlichen Zahlen. Die Elemente dieser Menge werden von Linnik [20] Quasiprimzahlen genannt,

d.h. die Quasiprimzahlen p' des Intervalles $[1, y]$ sind für $p' \leq x$ Primzahlen und für $p' > x$ Zahlen, die nur Primteiler größer x besitzen.

Hooley untersuchte nun die Verteilung der Quasiprimzahlen in arithmetischen Progressionen. Wir wollen das Ergebnis im folgenden Lemma formulieren

Lemma 2.8 (Hooley [16] S. 197). Sei $y' \leq y$ und $k \ll y^\theta$, wobei θ eine positive absolute Konstante kleiner als 1 und

$$d^{(1)} = \prod_{\substack{p \leq x \\ p \nmid d}} p^\alpha \quad \text{bzw.} \quad d^{(2)} = \prod_{\substack{p > x \\ p \mid d}} p^\alpha,$$

wenn

$$d = \prod p^\alpha, \quad \alpha = \alpha(d, p)$$

ist.

Dann gilt

$$\sum_{\substack{v \leq y' \\ v \equiv a \pmod{k}}} f(v) = \begin{cases} \frac{1}{\varphi(k)} B(y)y' + O\left(\frac{y}{k \ln^5 y}\right), & \text{falls } (a^{(1)}, k) = 1 \\ O\left(\frac{y}{k \ln^5 y}\right), & \text{falls } (a^{(1)}, k) > 1 \end{cases},$$

wobei die Funktion $B(y)$ nur von y abhängt und der Abschätzung

$$B(y) \ll \left(\frac{\ln \ln y}{\ln y} \right)^2$$

genügt.

Die Aussage dieses Lemmas ist, daß die Quasiprimzahlen in arithmetischen Progressionen eines großen Intervalles $([1, y^\theta], \theta < 1)$ gleichverteilt sind. Für Primzahlen ist eine vergleichbare Aussage mit $k \ll y^\theta$ und $\theta > 1/2$ nur unter Annahme der erweiterten Riemannschen Vermutung möglich.

Auf den Beweis von Lemma 2.8 wollen wir hier nicht näher eingehen, sondern nur bemerken, daß dieser auf einer schwächeren Form des Brunschen Siebes beruht.

Zum Schluß formulieren wir noch ein rechentechnisches Lemma.

Lemma 2.9.

Seien k, m_1, m_2 natürliche Zahlen mit $m_2 k \leq u$.
dann gilt für ganzes $a \neq 0$

$$\sum_{d|(a,k)} \sum_{\substack{1 \leq y \\ (l, m_1) = 1 \\ (k, m_1) = d}} \frac{\chi(1)}{\varphi(m_2 k d^{-1} l)}$$

$$\ll \sigma((a, k)) \left(\frac{\ln 2y}{y \cdot m_2 \cdot k} + \frac{\ln \ln u}{y \cdot m_2 \cdot k} \right) \ln \ln u.$$

Beweis. Die abzuschätzende Summe ist gleich

$$\sum_{d|(a,k)} \chi\left(\frac{d}{(m_2, d)}\right) \sum_{\substack{1 \leq y \\ d}} \frac{\chi(1)}{\varphi\left(\frac{m_2 k l}{(m_2, d)}\right)},$$

wobei in der inneren Summe über alle l mit $(l, m_1, k \cdot d^{-1}) = 1$ und in der äußeren Summe über die d mit $(kd^{-1}, m_2(m_2, d)^{-1}) = 1$ und $(d \cdot (m_2, d)^{-1}, m_1) = 1$ summiert wird. Wendet man Lemma 7 (mit leicht modifizierten Voraussetzungen) aus der Arbeit von Kátai [18] auf die innere Summe an, so folgt nach kurzer Rechnung die behauptete Abschätzung.

2.2 Die Summe Σ_A

Bei der asymptotischen Auswertung der Summe

$$(2.2.1) \quad \Sigma_A = \sum_{\substack{0 < p - a \leq x \\ p \equiv b \pmod{k} \\ p \equiv a \pmod{d}}} \sum_{\substack{1 \mid \frac{p-a}{d} \\ 1 \leq x^{1/2} x_1^{-1}}} \chi(1)$$

ist keine Fallunterscheidung zwischen $4 \mid k$ und $4 \nmid k$ notwendig.

Bezeichnen wir mit $\lambda(1)$ die kleinste nicht-negative Lösung (falls eine solche überhaupt existiert) des Kongruenzsystems

$$\begin{aligned} \lambda &\equiv a \pmod{d1} \\ \lambda &\equiv b \pmod{k} \end{aligned}$$

so gilt

(2.2.2)

$$\begin{aligned} \Sigma_A &= \sum_{1 \leq x^{1/2} x_1^{-1}} \chi(1) \pi(x; [d1, k], \lambda(1)) + O(x^{1/2} x_1^{-1}) \\ b - a &\equiv 0 \pmod{(1, k)} \\ (a, 1) &= 1 \end{aligned}$$

da für $(a, l) > 1$ höchstens eine Primzahl in der arithmetischen Progression a modulo dl enthalten ist $((a, dl) = (a, l),$ da $(a, d) = 1$).

Mit dem Satz von Bombieri (Lemma 2.1) folgt

$$\Sigma_A = \text{li } x \cdot \sum_{\substack{1 \leq x^{1/2} x_1^{-1} \\ b-a \equiv 0 \pmod{(l, k)} \\ (a, l) = 1}} \frac{\chi(l)}{\varphi([dl, k])} + O\left(\frac{x}{kd \cdot \ln^2 x}\right)$$

(2.2.3)

$$= \text{li } x \cdot \Sigma_1 + O\left(\frac{x}{kd \cdot \ln^2 x}\right),$$

da nach Voraussetzung $kd \ll \ln^T x$.

Sei $l = l_1 l_2$, wobei $(l_1, d) = 1$ und l_2 nur Primteiler p besitzt, die d teilen. l_1 zerlegen wir weiter in der Form $l_1 = l' m$, mit $m \mid (b-a, k)$ und $(l', (b-a, k)) = 1$. Hiermit erhalten wir

$$\Sigma_1 = \sum_{\substack{1 \leq x^{1/2} x_1^{-1} \\ p \mid l \Rightarrow p \mid d}} \frac{\chi(l)}{\varphi(l \cdot d)} \sum_{m \mid (b-a, k)} \chi(m)$$

$$= \sum_{\substack{l' \leq x^{1/2} (x_1 l m)^{-1} \\ (l', adk m^{-1}) = 1}} \frac{\chi(l')}{\varphi(l' \cdot k)}.$$

Lemma 2.3, auf die innere Summe angewandt, ergibt

(2.2.4)

$$\Sigma_1 = \frac{\pi}{4\varphi(k)} C_1 E(ak) \left\{ \sum_{\substack{1 \leq x_1^{1/2} \\ p|1 \Rightarrow p|d}} \frac{\chi(1)}{\varphi(1d)} \right\}$$

$$\left\{ \sum_{m|(b-a, k)} \chi(m) \prod_{\substack{p|m \\ p \nmid k \cdot m}} \left(\frac{p}{p-\chi(p)} \right) \right\}$$

$$+ O\left(\frac{x_1^{-1/2}}{k} \left\{ \sum_{m|(b-a, k)} d(akm^{-1}) m \right\} \right)$$

$$\cdot \left\{ \sum_{\substack{1 \leq x_1^{1/2} \\ p|1 \Rightarrow p|d}} \frac{1}{\varphi(1d)} \ln \frac{2kx_1^{1/2}}{x_1 \cdot 1 \cdot m} \right\}$$

$$= \frac{\pi}{4\varphi(k)} C_1 E(ak) \{H_1\} \{H_2\}$$

$$+ O\left(\frac{x_1^{-1/2}}{k} \{R_1\} \{R_2\} \right).$$

Erstreckt man in H_1 die Summe über 1 bis Unendlich, so folgt

(2.2.5)

$$H_1 = \frac{1}{\varphi(d)} \prod_{p|d} \left(\frac{p}{p-\chi(p)} \right) + O\left(\frac{x_1^{-1/2}}{d} \frac{1+\epsilon}{d} \right)$$

mit $0 < \epsilon < 1$. Lemma 2.4 gibt

$$(2.2.6) \quad H_2 = C_2(k; (k, b-a)) .$$

Für die Restgliedterme R_1 und R_2 zeigen einfache Abschätzungen, daß

$$(2.2.7) \quad R_1 \ll \sigma((b-a, k)) \ln^{\epsilon_1} x \quad \text{und} \quad R_2 \ll x^{\epsilon_2}$$

mit beliebig kleinen positiven ϵ_1 und ϵ_2 ist.

Fassen wir nun (2.2.1) - (2.2.7) zusammen, so folgt

$$(2.2.8)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_A = & \frac{\pi}{4\varphi(k)\varphi(d)} C_1 E(ak) C_2(k, (k, b-a)) \prod_{p|d} \left(\frac{p}{p-\chi(p)} \right) \\ & + O \left(\frac{x}{kd \cdot \ln^2 x} \right) . \end{aligned}$$

2.3 Die Summe Σ_C

Mit den üblichen Summenumformungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \Sigma_C &= \sum_{\substack{0 < p - a \leq x \\ p \equiv b \pmod{k} \\ p \equiv a \pmod{d}}} \sum_{\substack{1 \mid \frac{p-a}{d} \\ 1 \geq x^{1/2} x_1}} \chi(1) \\
 &= \sum_{m \leq x^{1/2} (x_1 d)^{-1}} \sum_{\substack{p - a = dlm \\ dmx^{1/2} x_1 \leq p - a \leq x \\ p \equiv b \pmod{k}}} \chi(1) \\
 &= \sum_{\substack{m \leq x^{1/2} (x_1 d)^{-1} \\ b - a \equiv dm \pmod{(4m, k)} \\ (a + dm, 2 \cdot dm) = 1}} \{ \pi(x; [4dm, k], \lambda_1) - \\
 &\quad - \pi(mx^{1/2} x_1 d; [4 \cdot dm, k], \lambda_1) \} \\
 &- \sum_{\substack{m \leq x^{1/2} (x_1 d)^{-1} \\ b - a \equiv 3dm \pmod{(4m, k)} \\ (a + dm, 2 \cdot dm) = 1}} \{ \pi(x; [4dm, k], \lambda_2) \\
 &\quad - \pi(mx^{1/2} x_1 d; [4dm, k], \lambda_2) \} \\
 &+ O \left(\frac{x}{kd \cdot \ln^2 x} \right).
 \end{aligned}$$

wobei $\lambda_i = \lambda_i(m)$ die kleinsten natürlichen Zahlen
mit $\lambda_i \equiv b \pmod{k}$ für $i = 1, 2$ und $\lambda_1 \equiv a + dm \pmod{4dm}$
bzw. $\lambda_2 \equiv a + 3dm \pmod{4dm}$ sind.

Setzen wir

$$\sum_{(i)1} = \sum_{\substack{m \leq x^{1/2} \\ b-a \equiv idm \pmod{(4m,k)}}} x^{1/2} (x_1 d)^{-1} \frac{1}{\varphi([4dm, k])}$$

$$(a + dm, 2dm) = 1$$

und

$$\sum_{(i)2} = \sum_{\substack{m \leq x^{1/2} \\ b-a \equiv idm \pmod{(4m,k)}}} x^{1/2} (x_1 d)^{-1} \frac{\text{li}(dm x^{1/2} x_1)}{\varphi([4dm, k])},$$

$$(a + dm, 2dm) = 1$$

so folgt mit Lemma 2.1

$$(2.3.1) \quad \Sigma_C = \text{li } x \left\{ \sum_{(1)1} - \sum_{(3)1} \right\}$$

$$- \left\{ \sum_{(1)2} - \sum_{(3)2} \right\} + O \left(\frac{x}{kd \cdot \ln^2 x} \right).$$

Für $4 \nmid k$ sind die Summationsbedingungen

$$b-a \equiv dm \pmod{(4m,k)} \quad \text{und} \quad b-a \equiv 3dm \pmod{(4m,k)}$$

äquivalent. Also erhalten wir

$$(2.3.2) \quad \Sigma_C \ll \frac{x}{kd \cdot \ln^2 x}.$$

Für $4|k$ müssen wir zur Auswertung von Σ_C vier Fälle unterscheiden:

- (1) $b - a \equiv 1 \pmod{4}$
- (2) $b - a \equiv 3 \pmod{4}$
- (3) $b - a \equiv 0$
- (4) $2^\eta \parallel b-a$, mit $\eta \geq 1$

Im Fall 1 ist a gerade (da $(b,k) = 1$) und damit $(a + dm, 2dm) = 1$ äquivalent zu $(a,m) = 1$. Also

$$\sum_{(1)}^2 - \sum_{(3)}^2 = \chi(d) \sum_{\substack{m \leq x^{1/2} (x_1 d)^{-1} \\ b-a \equiv 0 \pmod{(m,k)} \\ (m,a) = 1}} \frac{\chi(m) \text{li}(dm x^{1/2} x_1)}{\varphi([4dm, k])} \cdot$$

Entwicklung des Integrallogarithmus und Anwendung der Ungleichung

$$\left| \sum_{M < n \leq N} a_n b_n \right| \leq b_M \max_{M \leq n \leq N} \left| \sum_{M \leq m \leq n} a_m \right|$$

(wobei M, N ganz, a_i, b_i reell und $b_0 \geq b_1 \geq \dots \geq 0$) ergibt

$$\sum_{(1)}^2 - \sum_{(3)}^2 \ll dx^{1/2} x_1 \ln x^{-1} \max_{1 < y \leq x^{1/2} (dx_1)^{-1}}$$

$$\left| \sum_{\substack{1 < m \leq y \\ b-a \equiv 0 \pmod{(m,k)} \\ (m,a) = 1}} \frac{\chi(m)m}{\varphi([dm, k])} \right| + O\left(\frac{x}{kd \cdot \ln^2 x}\right) \cdot$$

Mit der Abschätzung aus Lemma 2.5 erhalten wir

$$\frac{\sum_{(1)}^2}{\sum_{(3)}^2} \ll \frac{x}{kd \cdot \ln^2 x}.$$

Eine zur Berechnung der Summe Σ_1 im Abschnitt (2.2) analoge Überlegung zeigt, daß im Fall 1

$$\frac{\sum_{(1)}^1}{\sum_{(3)}^1} = \chi(d) \Sigma_A + O\left(\frac{x}{kd \cdot \ln^2 x}\right) \text{ und damit}$$

$$(2.3.3) \quad \Sigma_C = \chi(d) \Sigma_A + O\left(\frac{x}{kd \cdot \ln^2 x}\right)$$

gilt.

Der Fall 2 kann analog zu Fall 1 behandelt werden. Man erhält

$$(2.3.4) \quad \Sigma_C = -\chi(d) \Sigma_A + O\left(\frac{x}{kd \cdot \ln^2 x}\right).$$

Wegen $b \equiv a$ ist im Fall 3 a ungerade und damit

$(a + dm, 2dm) \equiv 1$ äquivalent zu $(a, m) \equiv 1$ und $2 \mid m$

(denn nach Voraussetzung ist $(d, 2m) \equiv 1$). Setzt

man $k = 2^{\xi} \cdot k'$ mit $(k', 2) \equiv 1$, so folgt z.B.

$$\sum_{(1)}^{\Sigma} 1 - \sum_{(3)}^{\Sigma} 1 = \sum_{\nu \geq 1} \left\{ \sum_{m \leq x^{1/2}(x_1 d)^{-1} 2^{-\nu}} \varphi([2^{\nu+2} dm, 2^{\xi} k'])^{-1} \right. \\ \left. 2^{\nu} dm \equiv 0 \pmod{(2^{\nu+2} m, 2^{\xi} k')} \right. \\ \left. (m, 2a) = 1 \right\}$$

$$- \sum_{m \leq x^{1/2}(x_1 d)^{-1} 2^{-\nu}} \varphi([2^{\nu+2} dm, 2^{\xi} k'])^{-1} \} \\ 3 \cdot 2^{\nu} dm \equiv 0 \pmod{(2^{\nu+2} m, 2^{\xi} k')} \\ (m, 2a) = 1$$

Man sieht sofort, daß die Kongruenzen

$$2^{\nu} dm \equiv 0 \pmod{(2^{\nu+2} m, 2^{\xi} k')}$$

und

$$3 \cdot 2^{\nu} dm \equiv 0 \pmod{(2^{\nu+2} m, 2^{\xi} k')}$$

für $\nu < \xi$ nicht lösbar, bzw. für $\nu \geq \xi$ äquivalent sind. Da eine analoge Überlegung auch für $\sum_{(1)}^{\Sigma} 2 - \sum_{(3)}^{\Sigma} 2$ gilt, folgt $\sum_{(1)}^{\Sigma} 1 - \sum_{(3)}^{\Sigma} 1 = 0$ und analog $\sum_{(1)}^{\Sigma} 2 - \sum_{(3)}^{\Sigma} 2 = 0$

und damit

$$(2.3.5) \quad \Sigma_C = O\left(\frac{x}{k \cdot d \cdot \ln^2 x}\right).$$

Im Fall 4 ist a ungerade und damit $(a + dm, 2dm) = 1$ äquivalent zu $(a, m) = 1$ und $2|m$. Also

$$\sum_{(1)}^{\Sigma} 1 - \sum_{(3)}^{\Sigma} 1 = \sum_{v \geq 1} \left\{ \sum_{\substack{m \leq x^{1/2} (x_1 d)^{-1} 2^{-v} \\ b-a \equiv 2^{v+2} dm \pmod{2^{v+2} m, 2^{\xi} k'} \\ (m, 2a) = 1}} \varphi([2^{v+2} dm, 2^{\xi} k']^{-1}) \right. \\ \left. - \sum_{\substack{m \leq x^{1/2} (x_1 d)^{-1} 2^{-v} \\ b-a \equiv 3 \cdot 2^{v+2} dm \pmod{2^{v+2} m, 2^{\xi} k'} \\ (m, 2a) = 1}} \varphi([2^{v+2} dm, 2^{\xi} k']^{-1}) \right\}$$

Man rechnet wieder nach, daß die Kongruenzen

$$b - a \equiv 2^{v+2} dm \pmod{2^{v+2} m, 2^{\xi} k'}$$

und

$$b - a \equiv 3 \cdot 2^{v+2} dm \pmod{2^{v+2} m, 2^{\xi} k'}$$

für $v \geq \xi - 1$ und $\eta \geq 1$, entweder beide nicht lösbar oder beide lösbar und dann äquivalent sind.

Für $v < \xi - 1$ und $v \neq \eta$ besitzen die Kongruenzen keine Lösungen. Ist $v = \eta < \xi - 1$, so sind sie lösbar, aber nicht äquivalent. Damit ist für $\xi \geq 2$ und $\eta \geq \xi - 1$

$$(2.3.6) \quad \Sigma_C = O\left(\frac{x}{kd \ln^2 x}\right).$$

Für $\xi \geq 3$ und $v = \eta < \xi - 1$ erhält man mit ähnlichen Überlegungen wie in Abschnitt (2.2)

$$(2.3.7) \quad \Sigma_C = \chi(d) \Sigma_A + O\left(\frac{x}{kd \ln^2 x}\right)$$

für $(b-a) 2^{-\eta} \equiv 1 \pmod{4}$ und

$$(2.3.8) \quad \Sigma_C = -\chi(d) \Sigma_A + O\left(\frac{x}{kd \ln^2 x}\right)$$

für $(b-a)2^{-\eta} \equiv 3 \pmod{4}$.

Faßt man die Ergebnisse der Fallunterscheidungen
((2.3.6)-(2.3.8)) zusammen, so folgt

$$(2.3.9) \quad \Sigma_C = \chi(d) C_3(k; b-a) \Sigma_A + O\left(\frac{x}{kd \ln^2 x}\right) ,$$

wobei

$$C_3(k, b-a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \eta < \xi - 1, (b-a)2^{-\eta} \equiv 1 \pmod{4} \\ -1, & \text{falls } \eta < \xi - 1, (b-a)2^{-\eta} \equiv 3 \pmod{4} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

gesetzt wurde.

2.4 Die Summe Σ_B

In diesem Abschnitt werden wir zunächst die Summe Σ_B mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung durch zwei andere Summen, die wir Σ_D und Σ_E nennen wollen, abschätzen. Diese beiden Summen werden dann mit der Hooleyschen Methode nach oben abgeschätzt. Hierbei zeigt es sich, daß wir im Fall $4|k$ die Summe Σ_E nicht auswerten können. Im Abschnitt 2.5 werden wir dann diesen Fall behandeln und schließlich die behaupteten Restglieder der Sätze 1 und 2 beweisen.

Sei

$$F(m) = \sum_{\substack{1|m \\ x^{1/2}x_1^{-1} < 1 < x^{1/2}x_1}} \chi(1)$$

und

$$D(m) = \sum_{\substack{1|m \\ x^{1/2}x_1^{-1} < 1 < x^{1/2}x_1}} 1,$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\Sigma_B = \sum_{\substack{0 < p - a \leq x \\ p \equiv b \pmod{k} \\ p \equiv a \pmod{d}}} \sum_{\substack{1 \mid \frac{p-a}{d} \\ x^{1/2} x_1^{-1} < 1 < x^{1/2} x_1}} \chi(1)$$

(2.4.1)

$$\ll \left(\sum_{\substack{0 < p - a \leq x \\ p \equiv b \pmod{k} \\ p \equiv a \pmod{d}}} 1 \right)^{1/2} \left(\sum_{\substack{0 < p - a \leq x \\ p \equiv b \pmod{k} \\ p \equiv a \pmod{d}}} F^2 \left(\frac{p-a}{d} \right) \right)^{1/2} \\ D \left(\frac{p-a}{d} \right) \neq 0$$

$$= O \left(\left(\Sigma_D \right)^{1/2} \left(\Sigma_E \right)^{1/2} \right).$$

Wir werden im folgenden die Summen Σ_D und Σ_E mit der für unsere Zwecke modifizierten Hooley'schen Methode nach oben abschätzen. Mit der Hölder'schen Ungleichung erhält man für Summe Σ_D

$$\Sigma_D \ll \left(\sum_{\substack{0 < p < a \leq x \\ p \equiv b \pmod{k} \\ p \equiv a \pmod{d}}} 1 \right)^{1-\eta} \left(\sum_{\substack{0 < p - a \leq x \\ p \equiv a \pmod{d} \\ D \left(\frac{p-a}{d} \right) \neq 0}} 1 \right)^{\eta}$$

(2.4.2)

$$= O \left(\left(\Sigma_{D_1} \right)^{1-\eta} \left(\Sigma_{D_2} \right)^{\eta} \right).$$

Der Satz von Brun-Titchmarsh besagt, daß

$$(2.4.3) \quad \Sigma_{D_1} \ll \frac{x \ln \ln \ln x}{k \cdot d \cdot \ln x}$$

ist.

Zur Abschätzung von Σ_{D_2} führen wir einige Abkürzungen ein. Sei

$$(L_1) \equiv \{ l_1 \mid x^{1/2} x_1^{-1} < l_1 < x^{1/2} x_1 \}$$

$$(L_2) \equiv \{ l_2 \mid x^{1/2} (x_1 \cdot d \cdot \ln^2 x)^{-1} < l_2 < x^{1/2} x_1 \}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \Sigma_{D_2} &= \sum_{\substack{0 < p - a \leq x \\ p-a = l_1 l_2 \cdot d \\ (L_1), (L_2)}} 1 + \sum_{\substack{0 < p - a \leq x \\ p-a = l_1 l_2 \cdot d \\ (L_1), l_2 \leq x^{1/2} (x_1 \cdot d \cdot \ln^2 x)^{-1}}} 1 \end{aligned}$$

(2.4.5)

$$= \Sigma_1 + O \left(\frac{x}{d \cdot \ln^2 x} \right)$$

Die Summe Σ_1 teilen wir weiter auf.

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{\substack{0 < p - a \leq x \\ p - a = l_1 l_2 \cdot d \\ (L_1), (L_2)}} 1 + \sum_{\substack{0 < p - a \leq x \\ p - a = l_1 l_2 \cdot d \\ (L_1), (L_2)}} 1 \\ &\quad \Omega \left(\frac{p-a}{d} \right) > 10 \cdot \ln \ln x \quad \Omega \left(\frac{p-a}{d} \right) \leq 10 \cdot \ln \ln x \\ &= \Sigma_2 + \Sigma_3 \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.6 erhalten wir

$$\Sigma_2 \leq \sum_{\substack{m \leq x \\ \Omega\left(\frac{m}{d}\right) > 10 \ln \ln x \\ m \equiv 0 \pmod{d}}} 1$$

$$\Omega\left(\frac{m}{d}\right) > 10 \ln \ln x \\ m \equiv 0 \pmod{d}$$

$$(2.4.6) \leq \frac{1}{\ln^5 x} \sum_{m \leq \frac{x}{d}} \sqrt{e}^{\Omega(m)}$$

$$\ll \frac{x}{d \cdot \ln^2 x}.$$

Mit

$$R_x := \left\{ m \mid p \mid m \Rightarrow p \leq x^{\frac{1}{20 \cdot \ln \ln x}} \right\}.$$

erhalten wir

$$\Sigma_3 \leq \sum_{\substack{m \leq x \\ m \in R_x \\ m \equiv 0 \pmod{d} \\ \Omega\left(\frac{m}{d}\right) \leq 10 \cdot \ln \ln x}} 1 + \sum_{\substack{0 < p - a \leq x \\ p - a = l_1 l_2' d \\ (L_1), (L_2) \\ p - a \notin R_x}} 1$$

(2.4.7)

$$= \Sigma_4 + \Sigma_5.$$

Die Summe Σ_4 können wir trivial nach oben abschätzen

$$\Sigma_4 = \sum_{m \leq \frac{x}{d}} 1 \ll x^{1/2} d \ll \frac{x}{d \cdot \ln^2 x}.$$

$$(2.4.8) \quad d \cdot m \in R_x \\ \Omega(m) \leq 10 \cdot \ln \ln x$$

In Σ_5 folgt aus $p - a \notin R_x$, daß $p - a$ die Form $p - a = r' \cdot p'$ hat, wobei p' eine Primzahl größer $x^{\frac{1}{20 \cdot \ln \ln x}}$ ist. Da $p - a \equiv 0 \pmod{d}$ und $d \ll \ln^T x$ ist, folgt

$$p - a = r \cdot d p'.$$

Mit dieser Zerlegung von $p - a$ erhalten wir für
Summe Σ_5

$$\begin{aligned} \Sigma_5 &\leq \sum_{\substack{r < x^1 - \frac{1}{20 \cdot \ln \ln x} \\ r = l_1 l_2 \\ (L_2), l_1 < x^{1/2} x_1}} \sum_{\substack{0 < p - a \leq x \\ p - a = r d p'}} 1 \\ (2.4.9) \quad &+ \sum_{\substack{r < x^1 - \frac{1}{20 \ln \ln x} \\ r = l_1 l_2 \\ (L_1), l_2 < x^{1/2} x_1}} \sum_{\substack{0 < p - a \leq x \\ p - a = r d p'}} 1 \\ &= \Sigma_6 + \Sigma_7. \end{aligned}$$

Da offensichtlich $\Sigma_7 \ll \Sigma_6$ ist, genügt es, letztere Summe weiter zu behandeln. Die innere Summe in Σ_6 können wir mit Hilfe der Selbergschen Siebmethode*) durch

*) z.B. Satz 4.2 aus dem Buch von Prachar [22].

$$O \left(\frac{x}{rd} \cdot \frac{\ln \ln^3 x}{\ln^2 \frac{x}{rd}} \right)$$

nach oben abschätzen. Wir erhalten also

(2.4.10)

$$\Sigma_6 \ll \frac{x \ln \ln^3 x}{d \ln^2 x} \sum_{\substack{r < x \\ r = l_1 l_2 \\ (L_2), l_1 < x^{1/2} x_1}} \frac{1}{r} = \frac{x \ln \ln^3 x}{d \ln^2 x} \Sigma_8 .$$

Die Summe Σ_8 teilen wir weiter in

(2.4.11)

$$\begin{aligned} \Sigma_8 &= \sum_{\substack{r < x \\ r = l_1 l_2 \\ l_1 \leq \exp(\ln^\alpha x) \\ (L_2)}} \frac{1}{r} + \sum_{\substack{r < x \\ r = l_1 l_2 \\ \exp(\ln^\alpha x) < l_1 < x^{1/2} x_1 \\ (L_2)}} \frac{1}{r} \\ &= \Sigma_9 + \Sigma_{10} \end{aligned}$$

auf, wobei der Parameter $\alpha(>0)$ später geeignet gewählt werden wird. Die erste Summe läßt sich trivial nach oben abschätzen. Wir erhalten

$$(2.4.12) \quad \Sigma_9 < \ln^\alpha x \ln^{2\xi_0} x .$$

In Summe Σ_{10} teilen wir die Summationsbereiche von l_1 und l_2 in Intervalle ein. $(\exp(\ln^\alpha x), x^{1/2}x_1]$ zerlegen wir in Teilintervalle $(\exp(u_1 \ln^\alpha x), \exp((u_1 + 1) \ln^\alpha x)]$ und diese weiter in $(u_2) = (u_2, 2u_2]$. Die Anzahl u_0 der ersten Zerlegung ist durch $O(\ln^{1-\alpha} x)$, die der zweiten durch $O(\ln^\alpha x)$ nach oben beschränkt. Den Summationsbereich $(x^{1/2}(x_1 \ln^2 x)^{-1}, x^{1/2}x_1]$ von l_2 zerlegen wir in Teilintervalle $(u_3) = (u_3, 2u_3]$, deren Anzahl ein $O(\ln^{\xi_0} x)$ ist.

Wir können Σ_{10} wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned} \Sigma_{10} &\ll \sum_{1 \leq u_1 \leq u_0} \sum_{(u_2)} \sum_{(u_3)} \sum_{r \leq 4} \sum_{\substack{r=l_1 l_2, \\ l_1 \in (u_2), l_2 \in (u_3)}} \frac{1}{u_2 u_3} \sum_{\substack{r \leq 4 \\ 1 \leq l_1 \leq 2 u_2 \\ 1 \leq l_2 \leq 2 u_3}} u_2 u_3 \quad 1. \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Die innere Summe in der letzten Abschätzung von

$$(2.4.13) \text{ ist nach Lemma 2.7 ein } O\left(\frac{u_2 u_3}{\ln(2u_2)\ln(2u_3)} (\ln 4 u_2 u_3)^{1+\gamma_0} \cdot (\ln \ln 4 u_2 u_3)^3\right)$$

Eingesetzt in (2.4.13) ergibt dies

$$\Sigma_{10} \ll \sum_{1 \leq u_1 \leq u_0} \sum_{(u_2)} \sum_{(u_3)} \frac{(\ln x)^{\gamma_0} \cdot (\ln \ln x)^3}{u_1 \cdot \ln^\alpha x}$$

(2.4.14)

$$\ll \left(\sum_{1 \leq u_1 \leq u_0} \frac{1}{u_1} \right) \ln^{\gamma_0} x \cdot \ln^{2\xi_0} x$$

$$\ll \ln^{\gamma_0} x \cdot \ln^{3\xi_0} x.$$

Fassen wir nun (2.4.4) bis (2.4.14) zusammen, so erhalten wir

(2.4.15)

$$\Sigma_{D_2} \ll \frac{x(\ln \ln x)^3}{d \ln^2 x} (\ln^\alpha x \cdot \ln^{2\xi_0} x + \ln^{\gamma_0} x \cdot \ln^{3\xi_0} x)$$

Mit der Wahl von $\alpha = \gamma_0$ und $\gamma = 1 - \gamma_0 = 1 - \frac{1 + \ln \ln 2}{\ln 2} =$

$$= 0,0858$$

folgt

$$(2.4.16) \quad \Sigma_{D_2} \ll \frac{x}{\ln x} \ln x^{-\gamma} \cdot \ln^{4\xi_0} x$$

(2.4.2), (2.4.3) und (2.4.16) ergeben

$$(2.4.17) \quad \Sigma_D \ll \frac{x \cdot (\ln \ln \ln x)^{1-\eta} \cdot \ln^{-\gamma\eta} x \cdot \ln^{4\xi_0\eta} x}{k^{1-\eta} \cdot d \cdot \ln x},$$

Die Summe Σ_E schätzen wir nach oben ab, indem wir die Folge der Primzahlen p durch die der Quasiprimzahlen ersetzen *) .

$$\Sigma_E = \sum_{\substack{0 < p - a \leq x \\ p \equiv b \pmod{k} \\ p \equiv a \pmod{d}}} F^2 \left(\frac{p-a}{a} \right)$$

(2.4.18)

$$\leq \sum_{\substack{0 < v - a \leq x \\ v \equiv b \pmod{k} \\ v \equiv a \pmod{d}}} f(v) F^2 \left(\frac{v-a}{d} \right) := \Sigma_{E'} .$$

Der Einfachheit halber führen wir nun einige Abkürzungen ein.

$$(B) \equiv \{ v \mid v \equiv b \pmod{k} \}$$

$$(D) \equiv \{ v \mid v - a \equiv 0 \pmod{d} \}$$

$$(L_i) \equiv \left\{ l_i \mid \frac{x^{1/2} d}{x_1 u} < l_i < \frac{x^{1/2} x_1 d}{u} \right\}, i = 1, 2$$

$$(U) \equiv \{ u \mid u \equiv 0 \pmod{d} \}$$

$$(H) \equiv \{ (l_1, l_2) = 1 \} .$$

Mit diesen Abkürzungen erhalten wir, da $\chi^2(d) = 1$,

*) Zur Definition der Quasiprimzahlen und deren charakteristischen Funktion $f(\cdot)$ siehe Abschnitt 2.1 Lemma 2.8.

$$\Sigma_{E'} = \sum_{\substack{0 < v - a \leq x \\ (B), (D)}} f(v) \sum_{\substack{l_1 m_1 u = l_2 m_2 u = v - a \\ (L_1), (L_2), (H), (U)}} \chi(l_1) \chi(l_2) \chi^2(u)$$

(2.4.19)

$$= \sum_{u \geq x^{1/8}} + \sum_{u < x^{1/8}} = \Sigma_{11} + \Sigma_{12}$$

Vertauscht man in Summe Σ_{11} die Reihenfolge der Summation, so folgt

(2.4.20)

$$\Sigma_{11} = \sum_{\substack{(L_1), (L_2) \\ (U), (H) \\ (k, u \mid l_1 l_2) \mid b-a \\ u \geq x^{1/8}}} \chi(l_1) \chi(l_2) \chi^2(u) \sum_{\substack{0 < v - a \leq x \\ v \equiv \lambda \pmod{[u \mid l_1 l_2, k]}}} f(v),$$

wobei $\lambda = \lambda(l_1, l_2, u)$ die Kongruenzen $\lambda \equiv a \pmod{l_1 l_2 u}$ und $\lambda \equiv b \pmod{k}$ erfüllt. Die innere Summe in (2.4.20) ersetzen wir nun durch die asymptotische Formel aus Lemma 2.8 und erhalten

(2.4.21)

$$\Sigma_{11} = B(x) x \sum_{\substack{(L_1), (L_2), (H) \\ (U), (k, u \mid l_1 l_2) \mid b-a \\ (a^{(1)}, u \mid l_1 l_2) = 1 \\ x^{1/8} \leq u \leq \frac{x^{1/2} d}{x_1 \ln^5 x}}} \frac{\chi^2(u) \chi(l_1) \chi(l_2)}{\varphi([u \mid l_1 l_2, k])} +$$

$$+ B(x) x \sum_{\substack{(L_1), (L_2), (H), \\ (U), (k, u \mid l_1 l_2) \mid b-a \\ (a^{(1)}, u \mid l_1 l_2) = 1 \\ \frac{x^{1/2} d}{x_1 \ln^5 x} < u \leq x^{1/2} x_1 d}} \frac{\chi^2(u) \chi(l_1) \chi(l_2)}{\varphi([u \mid l_1 l_2, k])}$$

$$+ O \left(\frac{x}{\ln^5 x} \sum_{\substack{(L_1), (L_2), (H) \\ u \geq x^{1/8}, (U) \\ (k, u \mid l_1 l_2) \mid b-a}} \frac{1}{[u \mid l_1 l_2, k]} \right)$$

$$= B(x) X \{ \Sigma_{13} + \Sigma_{14} \} + O \left(\frac{x}{\ln^5 x} \Sigma_{15} \right).$$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß

$$(2.4.22) \quad \Sigma_{15} \ll \frac{(b-a, k)}{k \cdot d} \ln^{2\xi_0+1} x.$$

Mit Lemma 2.9 folgt

$$\Sigma_{13} = \sum_{x^{1/8} \leq u \leq \frac{x^{1/2} d}{x_1 \ln^5 x}} \chi^2(u) \chi(l_1) \sum_{m \mid (b-a, k)}$$

(2.4.23)

$$\cdot \sum_{\substack{(L_2) \\ (l_2, l_1 \mid a^{(1)}) = 1 \\ (k, u \mid l_1 l_2) = m}} \frac{\chi(l_2)}{\varphi(l_1 l_2 \mid u \mid k \mid m^{-1})} \ll \frac{\sigma((b-a, k))}{k \cdot d \cdot \ln^2 x}.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \Sigma_{14} &\ll \frac{\ln \ln x}{k} \sum_{m \mid (b-a, k)} \frac{\sum_{\substack{x^{1/2} d \\ x_1 \ln^5 x}}}{x_1 \ln^5 x} < u < x^{1/2} x_1 d \frac{m}{l_1 l_2 u} \\ (2.4.24) \quad & (k, u l_1 l_2) = m \\ & (U), l_1 l_2 \leq x_1^2 \ln^5 x \end{aligned}$$

$$\ll \frac{\ln \ln^2 x}{k \cdot d} \sigma((b-a, k)) \ln^{3\xi_0} x.$$

Zusammenfassung der Abschätzungen. (2.4.21) bis (2.4.24) ergibt

$$(2.4.25) \quad \Sigma_{11} \ll \frac{\sigma((b-a, k)) \cdot x \ln^{4\xi_0} x}{k \cdot d \ln x}$$

Nun zur Abschätzung von Σ_{12} . Sei

$$(R_i) \equiv \left\{ r_i \frac{x^{1/2} d}{x_1 u v} < r_i < \frac{x^{1/2} x_1 d}{u v} \right\}$$

für $i = 1, 2$. Dann gilt wegen

$$\sum_{\substack{r_1 v = l_1 \\ r_2 v = l_2}} \mu(v) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (l_1, l_2) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und mit den obigen Abkürzungen

$$\Sigma_{12} = \sum_{\substack{v-a = u \cdot r_1 r_2 \cdot v^2_m \\ 0 < v-a \leq x \\ (R_1), (R_2), u \leq x^{1/8} \\ (U), (B), (D)}} \mu(v) \chi^2(v) \chi^2(u) \chi(r_1) \chi(r_2) f(v)$$

(2.4.26)

$$= \sum_{v < x^{1/8}} + \sum_{v \geq x^{1/8}} = \Sigma_{16} + \Sigma_{17}.$$

In Summe Σ_{16} ist

$$r_1 v^2 u m < \frac{x}{r_2} < \frac{x^{3/4} x_1}{d},$$

also

(2.4.27)

$$\Sigma_{16} = O \left(\sum_{\substack{r_1 v^2 u m < \frac{x^{3/4} x_1}{d} \\ (R_1), (U), v, u < x^{1/8}}} \right)$$

$$\left| \sum_{\substack{v-a = u r_1 r_2 v^2_m \\ (B), y_1 \leq v < y_2}} \chi(r_2) f(v) \right|$$

$$= O \left(\sum |\Sigma_I| \right),$$

wobei $y_1 = \min \{ x + a, \max \{ a + r_1 v x^{1/2} x_1^{-1} d, 1 \} \}$

und $y_2 = \min \{ x + a, \max \{ a + r_1 v x^{1/2} x_1 d, 1 \} \}.$

Setzt man $\lambda = r_1 v^2 u m$, so folgt in Σ_I $v = a + \lambda r_2$ und damit

(2.4.28)

$$\Sigma_I = \left\{ \begin{array}{ll} \Sigma_{\substack{v - a \equiv \lambda \pmod{4\lambda} \\ (B), y_1 \leq v \leq y_2}} f(v) & - \Sigma_{\substack{v - a \equiv 3\lambda \pmod{4\lambda} \\ (B), y_1 \leq v \leq y_2}} f(v) \end{array} \right\}$$

Mit Lemma 2.8 folgt nun für $4 \nmid k$ die Abschätzung

(2.4.29)

$$\begin{aligned} \Sigma_{16} &\ll \frac{x}{\ln^5 x} \Sigma_{\substack{r_1 v^2 u m < \frac{x^{3/4} x_1}{d} \\ (U), v, u < x^{1/8}}} \frac{(2 r_1 v^2 u m, k)}{r_1 v^2 u m k} \\ &\quad (4 r_1 v^2 u m, k) \mid b - a - r_1 v^2 2 m \\ &\ll \frac{(b - a, k)}{k \cdot d} \frac{x}{\ln^2 x} \end{aligned}$$

Bemerkung. Für $4 \mid k$ erhalten wir mit Lemma 2.8 keine Abschätzung für Σ_I , die gut genug wäre, denn in diesem Fall heben sich die Hauptglieder der asymptotischen Gleichungen für die Summen in Σ_I nicht gegenseitig auf.

Man erhält also für Σ_{16} eine obere Abschätzung, die von höherer Größenordnung als die des Hauptgliedes des Satzes wäre. Wir werden daher in Abschnitt 2.5 eine andere Abschätzung für die Σ_E im Fall $4 \nmid k$ geben.

Für die Summe Σ_{17} erhält man mit einer einfachen Rechnung die Abschätzung

$$(2.4.30) \quad \Sigma_{17} \ll \frac{x}{k \cdot d \cdot \ln^2 x}.$$

Mit (2.4.26), (2.4.29) und (2.4.30) erhalten wir für $4 \nmid k$

$$(2.4.31) \quad \Sigma_{12} \ll \frac{(b - a, k)}{k \cdot d} \cdot \frac{x}{\ln^2 x},$$

(2.4.18), (2.4.19), (2.4.25) und (2.4.31) ergeben

$$(2.4.32) \quad \Sigma_E \ll \frac{\sigma((b - a, k))}{k \cdot d} \cdot \frac{x \ln^{4\xi_0} x}{\ln x}$$

für $4 \nmid k$.

2.5 Zusammenfassung der Zwischenergebnisse

Wir beweisen zunächst Satz 1, d.h. $4 \nmid k$.

Für die Summe Σ_B erhalten wir mit (2.4.1), (2.4.2), (2.4.17) und (2.4.32)

$$(2.5.1) \quad \Sigma_B \ll \frac{\sigma((b-a, k))^{1/2}}{k^{1-(1/2)\eta} d} \cdot \frac{x \ln^{2\xi_0} x}{\ln^{1+(1/2)\gamma\eta}}.$$

Da die Abschätzung von (2.4.2) auch für $\eta = 1$ richtig ist *), erhalten wir, nachdem wir ξ_0 hinreichend klein gewählt haben, eine weitere Abschätzung für Σ_B

$$(2.5.2) \quad \Sigma_B \ll \frac{\sigma((b-a, k))^{1/2}}{k^{1/2} d} \cdot \frac{x}{\ln^{1+\lambda} x}$$

mit $\lambda = 0,042$.

(1.2.6), (2.2.8), (2.3.2), (2.5.1) und (2.5.2) ergeben schließlich die Behauptung des Satzes 1 mit den verschiedenen Restgliedern, und der Konstanten

$$C(d, k, a) = \pi C_1 E(adk) C_2(k, (k, b-a)) \prod_{p|d} \left(\frac{p}{p - \chi(p)} \right).$$

Hierbei wurden wieder die Bezeichnungen aus Abschnitt 2.1 verwendet.

*) $\eta = 1$ bedeutet, daß die Kongruenz $p \equiv b \pmod{k}$ in der Summe Σ_D fortfällt.

Für $4 \nmid k$ (Satz 2) konnten wir die Summe Σ_E im Abschnitt 2.4 nicht nach oben abschätzen (siehe dortige Bemerkung). Es ist aber offensichtlich

$$\Sigma_E \leq \sum_{\substack{0 \leq p - a \leq x \\ p - a \equiv 0 \pmod{d}}} F^2\left(\frac{p-a}{d}\right)$$

Die Summe auf der rechten Seite der obigen Ungleichung entspricht aber der Summe Σ_E im Abschnitt 2.4 für $b = k = 1$. Verwendung der für diese Summe hergeleiteten Abschätzung ergibt für Σ_B dann

$$(2.5.3) \quad \Sigma_B \ll \frac{1}{\varphi(k)^{1/2 - (1/2)\eta_d}} \frac{x \ln^{2\xi_0} x}{\ln^{1 + (1/2)\gamma\eta_x}}$$

und mit den gleichen Überlegungen wie bei $4 \nmid k$ eine zweite Abschätzung

$$(2.5.4) \quad \Sigma_B \ll \frac{x}{d \ln^{1+\lambda} x}$$

mit gleichem λ .

Setzen wir nun mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 2.3

$$C_4(a,b,k) = \begin{cases} 1+\chi(d), & \text{falls } b-a \equiv 1 \pmod{4} , \\ & \text{oder } \xi \geq 3, \eta < \xi-1, (b-a)2^{-\eta} \equiv 1 \pmod{4} \\ 1, & \text{falls } b=a \text{ oder } \xi \geq 2, \eta \geq \xi-1 \\ 1-\chi(d), & \text{falls } b-a \equiv 3 \pmod{4} \text{ oder} \\ & \xi \geq 3, \eta < \xi-1, (b-a)2^{-\eta} \equiv 3 \pmod{4} , \end{cases}$$

so erhalten wir mit den Fallunterscheidungen (2.3.3) bis (2.3.8) aus Abschnitt 2.3, (1.2.7), (2.2.8), (2.5.3) und (2.5.4) die Behauptung des Satzes 2 mit der Konstanten

$$C^*(d,k,a) = C(d,k,a)C_4(a,b,k).$$

III Der Bombieri-Satz für B-Zahlen

3.1 Hilfssätze

Für $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$, sei

$$\Lambda_r(y, k, 1) = \sum_{\substack{n \leq y \\ n \equiv 1 \pmod{k}}} b(n) \ln^r\left(\frac{y}{n}\right) - \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{n \leq y \\ (n, k) = 1}} b(n) \ln^r\left(\frac{y}{n}\right)$$

und

$$\Lambda'_r(y, k, 1, j) = \sum_{\substack{n \leq y \\ n \equiv 1 \pmod{k}}} b(n) \ln^r\left(\frac{y}{n}\right) - \frac{2}{\varphi(k)} \sum_{\substack{n \leq y \\ (n, k) = 1 \\ n \equiv j \pmod{4}}} b(n) \ln^r\left(\frac{y}{n}\right).$$

Mit diesen Abkürzungen gilt

Lemma 3.1. Sei $1 \leq r \leq 10$. Ist

$$\sum_{\substack{k \leq x^{1/2} \ln^{-B} x \\ 4 \nmid k}} \max_{(k, 1) = 1} \max_{y \leq x} \left| \Lambda_r(y, k, 1) \right|$$

$$+ \sum_{\substack{k \leq x^{1/2} \ln^{-B} x \\ 4 \mid k}} \max_{j=1, 3} \max_{1 \equiv j \pmod{4}} \max_{y \leq x} \left| \Lambda'_r(y, k, 1, j) \right|$$

$$\ll \frac{x}{\ln^A x}$$

mit beliebigem positiven A und $B = B(A)$.

Dann gilt die gleiche Abschätzung, wenn man r durch $r - 1$ ersetzt.

Beweis. Wir wollen den Beweis nur kurz skizzieren, da er bekannte Techniken benutzt.

Man erhält zum Beispiel für $\Lambda_{r-1}(y, k, l)$ folgende Abschätzung ähnlich wie in [29]

$$\begin{aligned}
 (3.1.1) \quad & \Lambda_{r-1}(y, k, l) \\
 & \ll \left(\Lambda_r \left(y + \frac{y}{\lambda_{\sqrt{y}}}, k, l \right) - \Lambda_r(y, k, l) + F_1(y, k) \right) \cdot r \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{\ln A_y} \right) \\
 & + F_2(y, k).
 \end{aligned}$$

Hierbei sind $F_1(y, k)$ und $F_2(y, k)$ Fehlerglieder, die nach oben abgeschätzt größenordnungsmäßig klein genug sind, und die $\lambda_{\sqrt{y}}$ geeignet gewählte Zahlen größer Null. Eine (3.1.1) entsprechende Abschätzung läßt sich auch für $\Lambda'_{r-1}(y, k, l, j)$ zeigen. Mit diesen beiden Abschätzungen erhält man dann nach einiger Rechnung die Behauptung des Lemmas.

Im nächsten Hilfssatz stellen wir die erzeugende Funktion von $\sum \chi(n) b(n)$ ($\chi \neq \chi_0$) als Produkt von Wurzeln aus L-Reihen und einer analytischen Funktion dar. Es sei noch einmal daran erinnert, daß χ in diesem Kapitel beliebige Charaktere mod k bezeichnet, während der Nicht-Hauptcharakter modulo 4 mit χ_4 gekennzeichnet wird.

Lemma 3.2. Sei $\chi = \chi \bmod k$ ein beliebiger Charakter $\neq \chi_0$. Dann gilt für $\sigma > \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) b(n)}{n^s} = L(s, \chi)^{1/2} L(s, \chi \chi_4)^{1/2} H(s, \chi) .$$

Dabei ist $H(s, \chi)$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ eine analytische Funktion mit

$$H(s, \chi) \ll \ln^c x,$$

falls $\sigma \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{\ln x}$.

Beweis. Man entwickelt die Summe $\sum \chi(n) b(n) n^{-s}$ in ein Produkt und erhält die behauptete Darstellung mit

$$H(s, \chi) = \left(1 - \frac{\chi(2)}{2^s}\right)^{-1} \prod_{p \equiv 3 \pmod{4}} \left(1 - \frac{\chi^2(p)}{p^{2s}}\right)^{-1/2} .$$

Die übrigen Behauptungen des Hilfssatzes ergeben sich dann unmittelbar.

3.2 Beweis des Satzes 4.

Um Satz 4 zu beweisen, genügt es, nach Lemma 3.1 folgende Abschätzung zu zeigen.

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{k \leq x \\ 4 \nmid k}} x^{1/2} \ln^{-B} x \max_{(1,k)=1} \max_{y \leq x} |\Lambda_{10}(y, k, 1)| \\ & + \sum_{\substack{k \leq x \\ 4 \mid k}} x^{1/2} \ln^{-B} x \max_{j=1,3} \max_{\substack{(1,k)=1 \\ 1 \equiv j \pmod{4}}} \max_{y \leq x} |\Lambda_{10}(y, k, 1, j)| \\ & =: \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 \ll \frac{x}{\ln^A x}. \end{aligned}$$

Wir werden im weiteren nur die Summe $\mathfrak{S}_1$ behandeln, da die Abschätzung von $\mathfrak{S}_2$ bis auf geringe Modifikationen analog verläuft.

Ersetzen der Summationsbedingung $n \equiv 1 \pmod{k}$ in $\mathfrak{S}_1$ (siehe Definition von Λ_{10} in Abschnitt 3.1) durch die Summe über alle Charaktere modulo k liefert *)

$$\mathfrak{S}_1 \ll \sum_{\substack{k \leq x \\ 4 \nmid k}} x^{1/2} \ln^{-B} x \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{\chi \pmod{k} \\ \chi \neq \chi_0}} \max_{y \leq x} \left| \sum_{n \leq y} \chi(n) b(n) \ln^{10} (y/n) \right|$$

*) An dieser Stelle sieht man bei der Abschätzung von $\mathfrak{S}_2$, warum wir Λ'_{10} so wählen mußten.

Die innere Summe auf der rechten Seite der letzten Abschätzung stellen wir nun in üblicher Weise als Integral dar und erhalten mit Lemma 3.2

$$\mathfrak{S}_1 \ll \sum_{\substack{k \leq x^{1/2} \ln^{-B_x} \\ 4 \nmid k}} \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{\chi \bmod k \\ \chi \neq \chi_0}}$$

$$\max_{y \leq x} \left| \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{y^s}{s^{11}} L(s, \chi)^{1/2} L(s, \chi \chi_4)^{1/2} H(s, \chi) ds \right|,$$

wobei $\alpha = 1 + \frac{1}{\ln x}$ gesetzt wurde.

Bezeichnen wir mit χ^* (bzw χ^{**}) den primitiven Charakter, der zu χ (bzw $\chi \chi_4$) gehört und ordnen die obige Summe nach den primitiven Charakteren χ^* *), so folgt

$$\mathfrak{S}_1 \ll \ln \ln x \sum_{\substack{\mu \\ z_0 < z = 2^\mu \leq 2x}} \frac{1}{z} \sum_{k \in (\frac{z}{2}, z]} \sum_{\chi^* \bmod k} x^{1/2} \ln^{-B_x}$$

$$\sum_{k_1 \leq x(k \ln B_x)^{-1}} \frac{1}{k_1}$$

$$\max_{y \leq x} \left| \int_{\alpha - iz_1}^{\alpha + iz_1} \frac{y^s}{s^{11}} L(s, \chi^*)^{1/2} L(s, \chi^{**})^{1/2} H_1(s, \chi^*) ds \right|.$$

$$+ \frac{x}{\ln A x} \cdot$$

) Bemerkung: Zu jedem χ^ gehört eineindeutig ein χ^{**} .

wobei die Integrale bei

$$z_1 = \begin{cases} \exp(\ln^{1/4} x), & \text{falls } z \leq \exp(\ln^{1/4} x) \\ z^{1/4}, & \text{falls } \exp(\ln^{1/4} x) < z \leq 2x^{1/2} \ln^{-B} x \end{cases}$$

abgeschnitten wurden und $z_0 = 0$ ist. Die im Integral stehende Funktion $H_1(s, \chi^*)$ ist für $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$ analytisch und genügt für $\text{Re}(s) > \frac{1}{2} + \frac{1}{\ln x}$ der Abschätzung

$$H_1(s, \chi^*) \ll \ln^c x \quad *)$$

Als nächstes zeigen wir, daß der Beitrag der $k \leq \exp(\ln^{1/4} x)$ zur Summe in (3.2.1) ein $O(x \cdot \ln^{-A} x)$ ist.

Der Beitrag derjenigen χ^* (bzw χ^{**}) zu dieser Summe, die eventuell eine Siegel-Nullstelle besitzen, ist durch $O(x/\ln^A x)$ abschätzbar. Hierzu verwendet man den Satz von Siegel ([22], S.129) und benutzt, daß eine eindeutige Zuordnung zwischen χ^* und χ^{**} besteht. Für die primitiven Charaktere χ^* und χ^{**} , die keine Siegel-Nullstelle besitzen, sind $L(s, \chi^*)$ und $L(s, \chi^{**})$ im Bereich $\sigma \geq \sigma_0 = 1 - \ln^{-1/3} x$, $|t| \leq \exp(\ln^{1/4} x)$ nach Satz 6.9 bei Prachar [22] (S.130) nullstellenfrei und damit $L(s, \chi^*)^{1/2}$ bzw $L(s, \chi^{**})^{1/2}$ dort analytische Funktionen. Wir erhalten mit Satz 5.4 ([22], S.115) dann folgende Abschätzungen in dem oben genannten Bereich.

*) c bezeichnet im folgenden ein Konstante > 0 (nicht immer die gleiche an verschiedenen Stellen).

$$(3.2.2) \quad \left. \begin{array}{l} |L(s, \chi^*)^{1/2}| \\ |L(s, \chi^{**})^{1/2}| \end{array} \right\} \ll \exp\left(\frac{1}{2} \ln^{1/4} x\right)$$

Mit dem Cauchy-Integralsatz und unter Verwendung der Abschätzung (3.2.2) folgt, daß der Beitrag der $k \leq \exp(\ln^{1/4} x)$, für die χ^* bzw χ^{**} keine Siegel-Nullstellen besitzen, ein $O(x/\ln^A x)$ ist.

Damit haben wir gezeigt, daß die Abschätzung (3.2.1) auch mit $z_0 = \exp(\ln^{1/4} x)$ richtig ist.

Wir betrachten nun diejenigen primitiven Charaktere $\chi^* \bmod k$ mit $k > \exp(\ln^{1/4} x)$, für die

$$\begin{aligned} & L(s, \chi^*) = 0 \\ \text{oder} \quad & L(s, \chi^{**}) = 0 \\ (3.2.3) \quad & \text{oder} \quad \left| \sum_{z^\beta < n \leq z} \frac{\chi^*(n)}{n^s} \right| > 1 \\ & \text{oder} \quad \left| \sum_{z^\beta < n \leq z} \frac{\chi^{**}(n)}{n^s} \right| > 1 \end{aligned}$$

für ein s mit $\sigma \geq \frac{63}{64}$ und $|t| \leq z^{1/4}$ gilt.

Mit den Lemmata 4 und 7 aus [28] folgt, daß der Beitrag dieser χ^* zur Summe in (3.2.1) ein $O(x/\ln^A x)$ ist.

Es bleibt also noch die Summe über diejenigen χ^* abzuschätzen, für die

$$L(s, \chi^*) L(s, \chi^{**}) \neq 0$$

$$(3.2.4) \quad \text{und} \quad \left| \sum_{z^{\beta} < n \leq z} \frac{\chi^*(n)}{n^s} \right| \leq 1$$

$$\text{und} \quad \left| \sum_{z^{\beta} < n \leq z} \frac{\chi^{**}(n)}{n^s} \right| \leq 1$$

für alle s mit $\sigma \geq \frac{63}{64}$ und $|t| \leq z^{1/4}$ richtig ist.

Sei

$$\alpha_v = \frac{1}{2} + \frac{v}{\ln x} \quad \text{für} \quad v = 1, \dots, v_0,$$

wobei v_0 der kleinste Index mit $\alpha_{v_0} > \frac{63}{64}$ ist und

$$T_0 = z^{1/4}, \quad T_1 = [z^{1/4}], \quad T_2 = T_1 - 1, \dots, \quad T_{\rho-1} = -[z^{1/4}], \quad T_{\rho} = -z^{1/4}.$$

Die der Bedingung (3.2.4) genügenden Charaktere χ^*

teilen wir in Klassen $\mathcal{R}_{v, \mu}^*$ mit $1 \leq v \leq v_0$ und

$1 \leq \mu \leq \rho$ ein.

$\mathcal{R}_{v, \mu}^*$ bezeichne die Menge der Charaktere χ^* mit der

Eigenschaft, daß

I. $\nu = 1$; (3.2.4) gilt für alle s mit $\sigma \geq \alpha_1$, $T_{\mu-1} \leq t \leq T_{\mu-1}$.

II. $\nu > 1$; (3.2.3) gelte für mindestens ein s mit

$$\alpha_{\nu-1} \leq \sigma < \alpha_{\nu}, \quad T_{\mu-1} \leq t \leq T_{\mu-1}, \text{ aber (3.2.4)}$$

ist für alle $\sigma \geq \alpha_{\nu}$ und $T_{\mu-1} \leq t \leq T_{\mu-1}$ richtig.

Nun können wir analog wie bei Wolke [28] Integrationswege $\mathcal{L}_{\mu}^*(\chi^*)$ erklären. Wir setzen für $\chi^* \in \mathcal{R}_{\mu, \nu}^*$

$$s_{\mu,1}(\chi^*) = \alpha_{\nu} + iT_{\mu-1} \quad \text{und} \quad s_{\mu,2}(\chi^*) = \alpha_{\nu} + iT_{\mu}$$

und definieren hiermit

$$\mathcal{L}_0^*(\chi^*) = [s_{1,1}(\chi^*), 1 + \frac{1}{\ln x} + iz^{1/4}],$$

$$\mathcal{L}_{\rho+1}^*(\chi^*) = [s_{\rho,2}(\chi^*), 1 + \frac{1}{\ln x} - iz^{1/4}],$$

und für $1 \leq \mu \leq \rho$ sei

$$\mathcal{L}_{\mu}^*(\chi^*) = [s_{\mu,1}(\chi^*), s_{\mu,2}(\chi^*)] \cup I_1(\chi^*) \cup I_2(\chi^*),$$

$$\text{wobei} \quad I_1(\chi^*) = \begin{cases} [s_{\mu-1,2}(\chi^*), s_{\mu,1}(\chi^*)], & \text{falls } \nu(\chi^*, \mu-1) < \nu(\chi^*, \mu) \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{und } I_2(\chi^*) = \begin{cases} [s_{\mu+1,1}(\chi^*), s_{\mu,2}(\chi^*)], & \text{falls } v(\chi^*, \mu+1) < \\ & v(\chi^*, \mu) \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setzt man diese Wege zusammen, so sieht man, daß sie mit der Strecke $[1 + \frac{1}{\ln x} + iz^{1/4}, 1 + \frac{1}{\ln x} - iz^{1/4}]$ eine einfach geschlossene Kurve bilden, in deren Inneren (3.2.4) erfüllt ist. Mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes können wir daher die verbleibenden Integrale in (3.2.1) auf den Weg $\bigcup_{\mu=0}^{\rho+1} \mathfrak{L}_{\mu}^*(\chi^*)$ nach links verschieben und erhalten, wenn wir mit $S_{z,\mu}$ den Beitrag eines Paares (z, μ) bezeichnen,

(3.2.5)

$$S_{z,\mu} \ll \ln^c x \frac{1}{z} \sum_{k \in (\frac{z}{2}, z]} \sum_{\chi^* \bmod k}^*$$

$$\max_{y \leq x} \left| \int_{\mathfrak{L}_{\mu}^*(\chi^*)} \frac{y^s}{s^{11}} L(s, \chi^*)^{1/2} L(s, \chi^{**})^{1/2} H_1(s, \chi^*) ds \right| ,$$

wobei Σ^* die Summe über diejenigen χ^* bedeutet, für die die Integrationswege erklärt sind.

Mit den Abschätzungen (3.6.9) und (3.6.11) aus [28]

für unseren Fall kann man zeigen, daß die Integrale über die horizontalen Strecken $\mathfrak{L}_0^*(\chi^*)$ und $\mathfrak{L}_{\rho+1}^*(\chi^*)$ nach oben abgeschätzt von so kleiner Größenordnung sind, so daß

$S_{z,0}$ und $S_{z,\rho+1}$ bei Summation über z ein $O(x \ln^{-A} x)$ liefern.

Für $1 \leq \mu \leq \rho$ erhalten wir mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$S_{z,\mu} \ll \frac{\ln^c x}{z} \sum_{k \in (\frac{z}{2}, z]} \sum_{\chi^* \bmod k}^* x^{\alpha(\chi^*)}$$

$$\left(\int_{\mathfrak{L}_{\mu}^*(\chi^*)} \frac{|L(s, \chi^*)|}{|s|^{11}} |ds| \right)^{1/2}$$

$$\left(\int_{\mathfrak{L}_{\mu}^*(\chi^*)} \frac{|L(s, \chi^{**})|}{|s|^{11}} |ds| \right)^{1/2},$$

wobei $\alpha(\chi^*)$ durch χ^* und μ eindeutig bestimmt und gleich α_{ν} mit $\nu = \nu(\chi^*, \mu)$ ist. Wieder mit (3.6.9) und (3.6.11) aus [28] und unter mehrfacher Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$S_{z,\mu} \ll \frac{\ln^c x}{z} \sum_{k \in (\frac{z}{2}, z]} \sum_{\chi^* \bmod k}^* x^{\alpha(\chi^*)}$$

$$\left(\int_{\mathfrak{L}_{\mu}^*(\chi^*)} \frac{(|t| + 1)^2}{|s|^{11}} \left| \sum_{n \leq z} \frac{a(n) \chi^*(n)}{n^s} \right| |ds| \right)^{1/2}$$

$$\left(\int_{\mathfrak{L}_{\mu}^*(\chi^*)} \frac{(|t| + 1)^2}{|s|^{11}} \left| \sum_{n < z} \frac{a'(n) \chi^{**}(n)}{n^s} \right| |ds| \right)^{1/2} \quad *)$$

*) Die $a(n)$ und $a'(n)$ bestimmen sich aus (3.6.11) in [28].

$$\ll \frac{\ln^c x}{z} \sum_{\nu=1}^{\nu_0} x^{\alpha_\nu} \sum_{\chi^* \in \mathfrak{R}_{\mu, \nu}^*}$$

$$\left(\int_{\mathfrak{L}_{\mu, \nu}^*} \frac{(|t|+1)^2}{|s|^{11}} \left| \sum_{n \leq z} \frac{a(n) \chi^*(n)}{n^s} \right| |ds| \right)^{1/2}$$

$$\left(\int_{\mathfrak{L}_{\mu, \nu}^*} \frac{(|t|+1)^2}{|s|^{11}} \left| \sum_{n \leq z} \frac{a'(n) \chi^{**}(n)}{n^s} \right| |ds| \right)^{1/2}$$

$$\ll \frac{\ln^c x}{z} \sum_{\nu=1}^{\nu_0} x^{\alpha_\nu}$$

$$\left(\int_{\mathfrak{L}_{\mu, \nu}^*} \frac{(|t|+1)^2}{|s|^{11}} \sum_{\chi^* \in \mathfrak{R}_{\mu, \nu}^*} \left| \sum_{n \leq z} \frac{a(n) \chi^*(n)}{n^s} \right| |ds| \right)^{1/2}$$

$$\left(\int_{\mathfrak{L}_{\mu, \nu}^*} \frac{(|t|+1)^2}{|s|^{11}} \sum_{\chi^* \in \mathfrak{R}_{\mu, \nu}^*} \left| \sum_{n \leq z} \frac{a'(n) \chi^{**}(n)}{n^s} \right| |ds| \right)^{1/2}$$

$$\ll \frac{\ln^c x}{z} (|T_\mu| + 1)^{-4} \sum_{\nu=1}^{\nu_0} x^{\alpha_\nu}$$

$$\left(\int_{\mathfrak{L}_{\mu, \nu}^*} \sum_{\chi^* \in \mathfrak{R}_{\mu, \nu}^*} \left| \sum_{n \leq z} \frac{a(n) \chi^*(n)}{n^s} \right| |ds| \right)^{1/2}$$

$$\left(\int_{\mathfrak{L}_{\mu, \nu}^*} \sum_{\chi^* \in \mathfrak{R}_{\mu, \nu}^*} \left| \sum_{n \leq z} \frac{a'(n) \chi^{**}(n)}{n^s} \right| |ds| \right)^{1/2}$$

Wegen der eineindeutigen Zuordnung von χ^* und χ^{**} ist

$$\#\{\mathfrak{R}_{\mu,\nu}^*\} \leq 2 \#\{\mathfrak{R}_{\mu,\nu}\},$$

wobei die $\mathfrak{R}_{\mu,\nu}$ die in [28] definierten Klassen sind.

Hiermit kann man nun die weiteren Abschätzungen von dort übernehmen und erhält für $\mathfrak{S}_1$ die behauptete Abschätzung.

IV Beweis von Satz 3

4.1 Hilfssätze

Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 2.1 gilt

Lemma 4.1. Es ist

$$\sum_{n \leq x} b(n) E(n) = C_2 \frac{x}{\ln^{1/2} x} + O\left(\frac{x}{\ln^{3/2} x} \ln \ln x\right)$$

mit einer positiven Konstanten

$$C_1 = \prod_{p \equiv 1 \pmod{4}} \left(1 - \frac{1}{p^2 - p + 1}\right) \prod_{p \equiv 3 \pmod{4}} \left(1 + \frac{1}{(p^2 - p - 1)p}\right).$$

Beweis. Wir betrachten zunächst die erzeugende Funktion von $\sum b(n)E(n)$. Für komplexes s mit $\operatorname{Re}(s) > 1$ ist

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{b(n) E(n)}{n^s} &= \sum_{n \geq 1} \frac{b(n)}{n^s} \prod_{p \equiv 1 \pmod{4}} \left(1 - \frac{1}{(p^2 - p + 1)p^s}\right) \\ &\quad \prod_{p \equiv 3 \pmod{4}} \left(1 + \frac{1}{(p^2 - p - 1)p^{2s}}\right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{b(n)}{n^s} H(s). \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$(4.1.1) \quad \sum_{n \leq x} b(n) E(n) = \sum_{mn \leq x} b(m) h(n) ,$$

wobei die Funktion $h(n)$ durch

$$H(s) = \sum_n \frac{h(n)}{n^s}$$

definiert ist.

Wir teilen nun die Summe auf der rechten Seite von

(4.1.1) folgendermaßen auf

$$\begin{aligned} & \sum_{mn \leq x} b(m) h(n) \\ (4.1.2) \quad &= \sum_{\substack{mn \leq x \\ n \leq \ln^5 x}} b(m) h(n) + \sum_{\substack{mn \leq x \\ n > \ln^5 x}} b(m) h(n) \\ &= \Sigma_1 + \Sigma_2 . \end{aligned}$$

In Σ_1 setzen wir die asymptotische Entwicklung für die Anzahl der B-Zahlen $\leq x/n$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= x \sum_{n \leq \ln^5 x} \frac{h(n)}{n(\ln(x/n))^{1/2}} + \\ &+ o\left(x \sum_{n \leq \ln^5 x} \frac{|h(n)|}{n(\ln(x/n))^{3/2}}\right) . \end{aligned}$$

Da $\sum h(n)n^{-s}$ für $\operatorname{Re}(s) > 0$ absolut konvergiert, ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$(4.1.3) \quad \Sigma_1 = \frac{x}{\ln^{1/2} x} H(1) + O\left(\frac{x}{\ln^{1/2} x} \ln \ln x\right)$$

Die Summe Σ_2 können wir durch

$$(4.1.4) \quad x \sum_{n > \ln^5 x} \frac{|h(n)|}{n} \ll_{\epsilon} \frac{x}{\ln^{5-\epsilon} x}$$

nach oben abschätzen.

(4.1.1) bis (4.1.4) zusammengefaßt ergeben die Behauptung des Lemmas.

Lemma 4.2. Für natürliche r, m und reelles x mit

$$(r, m) = 1, m \leq \ln^A x \quad \text{und} \quad \frac{x}{r \cdot m^2} > 2 \quad \text{gilt}$$

$$S^* = \# \left\{ p \leq \frac{x}{r} \mid p^{r+1} = m^2 l, (1, p_3) = 1 \right\}$$

$$\ll \frac{x}{r m^2} \frac{\ln \ln x^{1/2}}{\left(\ln \frac{x}{r m^2}\right)^{3/2}},$$

$$\text{wobei } P_3 = P_3(x) = \prod_{\substack{p \leq x \\ p \equiv 3 \pmod{4}}} p \quad \text{gesetzt wurde.}$$

Beweis. Wir werden dieses Lemma mit der Selbergschen Siebmethode beweisen. Wir verwenden hierbei einen Siebsatz aus dem Buch "Einführung in Siebmethoden der analytischen Zahlentheorie" von W. Schwarz ([23]). Die in diesem Beweis verwendeten Bezeichnungen sind diesem Buch entnommen.

Wir setzen

$$N = \frac{x}{rm^2}, \quad \mathcal{U} = \left\{ k \leq \frac{x}{r} \mid k \equiv -r' \pmod{m^2} \right\}$$

$$\text{mit } r'r \equiv 1 \pmod{m^2},$$

$$\mathcal{P} = \{ p \leq z \mid p \nmid m \} := \{p_1, \dots, p_l\}$$

und

$$\prod \mathcal{P} = \prod_{p \in \mathcal{P}} p.$$

Jeder Primzahl p_ρ aus $\mathcal{P}$ ordnen wir k_ρ inkongruente Restklassen $\mathfrak{R}_{\rho, \kappa}$ modulo p_ρ zu.

$$\mathfrak{R}_{p_\rho, 1} = \overline{0}^*), \text{ falls } p_\rho \nmid 3 \pmod{4}$$

$$\mathfrak{R}_{p_\rho, 1} = \overline{0}, \text{ falls } p_\rho \mid r \text{ und } p_\rho \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\mathfrak{R}_{p_\rho, 1} = \overline{0} \text{ und } \mathfrak{R}_{p_\rho, 2} \equiv -\overline{r'}, \text{ falls } p_\rho \nmid r$$

$$\text{und } p \equiv 3 \pmod{4}.$$

Bezeichnen wir mit

$$S = S(\mathcal{U}, \mathcal{P}, \mathfrak{R}) = \# \left\{ a \in \mathcal{U} \mid a \notin \bigcup_{\rho=1}^l \bigcup_{\kappa=1}^{k_\rho} \mathfrak{R}_{\rho, \kappa} \right\},$$

so gilt offensichtlich

$$S^* \leq S + O(z).$$

*) $\overline{a}$ bezeichne die Restklasse $a \pmod{p_\rho}$

Weiter sei

$$\sigma(a) = (a, \prod \mathfrak{P}) (ar + 1, \prod_{\substack{p \leq z \\ p \equiv 3 \pmod{4} \\ p \nmid rm}} p)$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{falls } a \notin \bigcup_{\rho} \bigcup_{\kappa} \mathfrak{R}_{\rho, \kappa} \\ p_{\rho_1}, \dots, p_{\rho_n}, & \text{falls } a \text{ in genau } n \\ & \text{Restklassen modulo } p_{\rho_1}, \dots, p_{\rho_n} \\ & \text{liegt} \end{cases}$$

und

$$\mathfrak{D} = \{ d \mid \prod \mathfrak{P} \}.$$

Jedes $d \in \mathfrak{D}$ besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$d = d_1 d_2 d_3 \quad \text{mit}$$

$$d_1 = (d, r), \quad d_2 = (d, \prod_{\substack{p \leq z \\ p \not\equiv 3 \pmod{4} \\ p \nmid rm}} p), \quad d_3 = (d, \prod_{\substack{p \leq z \\ p \equiv 3 \pmod{4} \\ p \nmid rm}} p)$$

und es gilt

$$\sigma(a) \equiv 0 \pmod{d} \iff \begin{cases} a \equiv 0 \pmod{d_1} \\ a \equiv 0 \pmod{d_2} \\ a(ar + 1) \equiv 0 \pmod{d_3} \end{cases}.$$

Für $d \in \mathfrak{D}$ ist

$$\begin{aligned}
 \Sigma_d &= \sum_{\substack{a \in \mathcal{U} \\ \sigma(a) \equiv 0 \pmod{d}}} 1 \\
 &= \sum_{\substack{a \equiv -r' \pmod{m^2} \\ a \leq \frac{x}{r} \\ \sigma(a) \equiv 0 \pmod{d}}} 1 \\
 &= \sum_{\substack{0 < v \leq d_3 \\ v(vr + 1) \equiv 0 \pmod{d_3}}} \sum_{\substack{0 < a' \leq d_1 d_2 d_3 \\ a' \equiv 0 \pmod{d_1} \\ a' \equiv 0 \pmod{d_2} \\ a' \equiv v \pmod{d_3}}} 1 \\
 &= \sum_{\substack{a \leq \frac{x}{r} \\ a \equiv -r' \pmod{m^2} \\ a \equiv a' \pmod{d_1 d_2 d_3}}} 1 \\
 &= \frac{x}{rm^2} \frac{2^{\omega(d_3)}}{d_1 d_2 d_3} + \theta \frac{2^{\omega(d_3)}}{d} \\
 &= N \gamma(d) + R(d),
 \end{aligned}$$

$$\text{wobei } \gamma(d) = \frac{2^{\omega(d_3)}}{d} \quad \text{und} \quad R(d) = \theta \frac{2^{\omega(d_3)}}{d}$$

mit $|\theta| \leq 1$ gesetzt wurde.

$\gamma(d)$ ist offensichtlich multiplikativ und es ist
 $\gamma(1) = 1$, $0 < \gamma(d) < 1$ für $d \neq 1$, $|R(d)| \leq 2d\gamma(d)$
 und $d \cdot \gamma(d) \geq 1$.

Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes 1.4 aus [23] (S. 177) erfüllt und wir erhalten für $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{P}, \mathfrak{X})$ folgende Abschätzung

$$S(\mathfrak{A}, \mathfrak{P}, \mathfrak{X}) \leq \frac{x}{r m^2 Q(\mathfrak{D})} + 2 z^2 \prod_{\substack{p \leq z \\ p \in \mathfrak{D}}} (1 - \gamma(p))^{-2},$$

wobei

$$\begin{aligned} Q(\mathfrak{D}) &= \sum_{d \in \mathfrak{D}} \gamma(d) \prod_{p \mid d} (1 - \gamma(p))^{-1} \\ &\geq \sum_{d \in \mathfrak{D}} \gamma(d) = \sum_{\substack{d \leq z \\ (d, m)=1}} \mu^2(d) \gamma(d) = Q'(\mathfrak{D}) \end{aligned}$$

ist.

$Q'(\mathfrak{D})$ schätzt man nun mit einem Satz von Wirsing ([27], S. 76) weiter nach unten ab. Nach einigen elementaren Rechnungen erhält man schließlich

$$S(\mathfrak{A}, \mathfrak{P}, \mathfrak{X}) \ll \frac{x (\ln \ln x)^{1/2}}{r m^2 (\ln z)^{3/2}} + z^2 \prod_{\substack{p \leq z \\ p \in \mathfrak{D}}} (1 - \gamma(p))^{-2}.$$

Nach der Wahl des Parameters z als

$$z = \left(\frac{x}{r m^2} \right)^{1/3}$$

ergibt sich die behauptete Abschätzung für S^* .

Als nächstes wollen wir einen Hilfssatz formulieren, der dem Lemma 2.8 für B-Zahlen entspricht. Es zeigt sich auch hier, daß die Summe

$$\sum_{\substack{n \leq y \\ n \equiv a \pmod{k}}} b(n)$$

für $k < y^\theta$ (mit $0 < \theta < 1$) nicht direkt auswertbar ist. Wir ersetzen daher die Folge der B-Zahlen durch eine andere, die wir wie folgt definieren.

Sei

$$x_0 = x^{\frac{1}{(\ln \ln x)^2}}, \quad P_3 \equiv P_3(x) = \prod_{\substack{p \leq x_0 \\ p \equiv 3 \pmod{4}}} p,$$

$$\mathfrak{D}_3 = \{n \in \mathbb{N} \mid p \mid n \Rightarrow p \equiv 3 \pmod{4}\}$$

und

$$\mathfrak{B}^* = \{n \in \mathbb{N} \mid n = m^2 l, (m, l) = 1, m \in \mathfrak{D}_3, m \leq \ln^A x, (l, P_3) = 1\}.$$

$b^*(.)$ sei die charakteristische Funktion von $\mathfrak{B}^*$.

Für diese Funktion erhalten wir nun das Äquivalent zu Lemma 2.8 als

Lemma 4.3. Sei $\ln^{2A} x < y \leq x$, b und k natürliche Zahlen mit $(b, k) = 2^\gamma$ ($\gamma = 0, 1$) und $k < x^\theta$ ($0 < \theta < 1$).

Dann gilt

$$\sum_{\substack{n \leq y \\ n \equiv b \pmod{k}}} b^*(n) = \frac{1}{k} \prod_{p|k} \left(1 + \frac{1}{p}\right) B^*(x) y + O\left(\frac{x}{k \ln^{10} x}\right),$$

wobei $B^*(x)$ nur von x abhängt und der Abschätzung

$$B^*(x) \ll \frac{\ln \ln x}{\ln^{1/2} x}$$

genügt.

Beweis. Um die Funktion $b^*(.)$ rechnerisch besser in den Griff zu bekommen, definieren wir folgende Funktion.

$$h^*(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (n, P_3) = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$\sum_{\substack{n \leq y \\ n \equiv b \pmod{k}}} b^*(n) = \sum_{\substack{m \in \mathfrak{D}_{3A} \\ m \leq \ln x}} \sum_{\substack{1 \leq x/m^2 \\ \ln^2 \equiv b \pmod{k} \\ (1, m) = 1}} h^*(n)$$

$$= \sum_{\substack{m \in \mathfrak{D}_{3A} \\ m \leq \ln x}} I(m, x m^{-2})$$

Nun gilt mit Gleichung (18) aus [16]

$$I(m, z) = \sum_{\substack{1 \leq z \\ \ln^2 \equiv b \pmod{k}}} \sum_{d | P_3 m} \mu(d)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\substack{d|P_{3^m} \\ \omega(d) \leq r}} \mu(d) \sum_{\substack{1 \leq z \\ lm^2 \equiv b \pmod{k} \\ l \equiv 0 \pmod{d}}} 1 + \\
 &+ O\left(\sum_{d \nmid P_{3^m}} \sum_{\substack{1 \leq z \\ \omega(d) = r+1 \\ lm^2 \equiv b \pmod{k} \\ l \equiv 0 \pmod{d}}} 1 \right),
 \end{aligned}$$

wobei die natürliche Zahl r später geeignet gewählt wird. Sei zunächst $(b, k) = 1$. Dann hat die Kongruenz $lm^2 \equiv b \pmod{k}$ genau dann eine Lösung l , wenn $(m^2, k) = 1$ ist. Also ist für $(m, k) > 1$ die Summe $I(m, z) = 0$. Für $(m, k) = 1$ gilt

$$(4.1.2) \quad \sum_{\substack{1 \leq z \\ lm^2 \equiv b \pmod{k} \\ l \equiv 0 \pmod{d}}} 1 = \begin{cases} \frac{z}{dk} + O(1), & \text{falls } (d, k) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

da das Kongruenzensystem

$$\begin{aligned}
 m^2 l &\equiv b \pmod{k} \\
 l &\equiv 0 \pmod{d}
 \end{aligned}$$

genau dann Lösungen besitzt, wenn $(d, k) = 1$ ist.

Eine ähnliche Betrachtung zeigt, daß (4.1.2) auch ein Fall $(b, k) = 2$ richtig ist.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 I(m, z) &= \frac{z}{k} \sum_{\substack{d \mid P_{3^m} \\ (d, k) = 1}} \frac{\mu(d)}{d} + O\left(\frac{z}{k} \sum_{\substack{d \mid P_{3^m} \\ \omega(d) > r}} \frac{1}{d}\right) \\
 &\quad + O\left(\sum_{\substack{d \mid P_{3^m} \\ \omega(d) \leq r+1}} 1\right)
 \end{aligned}$$

Diese asymptotische Formel wertet man nun wie in der Arbeit von Hooley [16] weiter aus und erhält nach anschließender Summation über m (Gleichung (4.1.1)) die Behauptung von Lemma 4.3.

Lemma 4.4. Für natürliche m und n gilt

$$\sum_{\substack{1 \leq y \\ (1, m) = 1}} \frac{\chi(1)}{1} \prod_{\substack{p \mid 1 \\ p \nmid mn \\ p \equiv 3 \pmod{4}}} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \ll \frac{d(m) \ln y}{y}$$

Beweis. Die obige Summe ist gleich

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\substack{1 \leq y \\ (1, mn) = 1 \\ p \nmid 1 \Rightarrow p \equiv 3 \pmod{4}}} \frac{\mu(1) \chi(1)}{1^2} \sum_{\substack{d \geq \frac{y}{1} \\ (d, m) = 1}} \frac{\chi(d)}{d} \\
 &+ \sum_{\substack{d \\ (d, m) = 1}} \frac{\chi(d)}{d} \sum_{\substack{1 > y \\ (1, mn) = 1 \\ p \mid 1 \Rightarrow p \equiv 3 \pmod{4}}} \frac{\mu^2(1) \chi(1)}{1^2}
 \end{aligned}$$

Einsetzen der asymptotischen Formel aus Lemma 2.2
in beide Summen, ergibt nach kurzer Rechnung die
Behauptung.

4.2 Die Summen Σ_A und Σ_C

Mit Satz 4 ist

$$\begin{aligned}
 \Sigma_A &= \sum_{1 \leq x^{1/2} x_1^{-1}} \chi(1) \sum_{\substack{1 < v \leq x \\ v \equiv 1 \pmod{1}}} b(v) \\
 &= \sum_{1 < x^{1/2} x_1^{-1}} \chi(1) \\
 &\quad \left\{ \sum_{\substack{1 < v \leq x \\ v \equiv 1 \pmod{1}}} b(v) - \frac{1}{\varphi(1)} \sum_{\substack{1 < v \leq x \\ (v,1) = 1}} b(v) \right\} \\
 &\quad + \sum_{1 \leq x^{1/2} x_1^{-1}} \frac{\chi(1)}{\varphi(1)} \sum_{\substack{1 < v \leq x \\ (v,1) = 1}} b(v) \\
 &= \sum_{1 \leq x^{1/2} x_1^{-1}} \frac{\chi(1)}{\varphi(1)} \sum_{\substack{1 < v \leq x \\ (v,1) = 1}} b(v) + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right),
 \end{aligned}$$

da $\chi(1) = 0$ für $1 \equiv 0 \pmod{2}$.

Nach Vertauschung der Reihenfolge der Summation folgt

$$\Sigma_A = \sum_{1 < v \leq x} b(v) \sum_{\substack{1 \leq x^{1/2} x_1^{-1} \\ (1,v) = 1}} \frac{\chi(1)}{\varphi(1)} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

Ersetzen der inneren Summe durch die asymptotische Formel aus Lemma 2.3 ($k = 1$) und eine einfache Abschätzung für das auftretende Restglied ergibt

$$\Sigma_A = \frac{\pi}{4} C_1 \sum_{1 < \nu \leq x} b(\nu) E(\nu) + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

Mit Lemma 4.1 folgt schließlich

(4.2.1)

$$\Sigma_A = \frac{\pi}{4} C_1 C_2 \frac{x}{\ln^{1/2} x} + O\left(\frac{x \ln \ln x}{\ln^{3/2} x}\right).$$

Nun zur Abschätzung von Σ_C .

$$\begin{aligned} \Sigma_C &= \sum_{1 < \nu \leq x} b(\nu) \sum_{\substack{1m = \nu - 1 \\ 1 \geq x^{1/2} x_1}} \chi(1) \\ &= \sum_{j=0}^3 \sum_{\substack{m < x^{1/2} x_1^{-1} \\ m \equiv j \pmod{4}}} \left\{ \sum_{\substack{m x^{1/2} x_1 < \nu \leq x \\ \nu \equiv 1+m \pmod{4m}}} b(\nu) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{m x^{1/2} x_1 \leq \nu \leq x \\ \nu \equiv 1+3m \pmod{4m}}} b(\nu) \right\}. \end{aligned}$$

Addiert und subtrahiert man wie in Σ_A in der Klammer

die üblichen Summen *), in denen die Kongruenzen durch Bedingungen über größte gemeinsame Teiler ersetzt wurden, so erhält man mit Satz 4 die Abschätzung

$$(4.2.2) \quad \Sigma_C = O \left(\frac{x}{\ln^2 x} \right) .$$

*) vgl. auch Abschnitt 2.3 für 4k .

4.3 Die Restgliedabschätzung

In diesem Abschnitt soll die Summe

$$\Sigma_B = \sum_{1 < v \leq x} b(v) \sum_{\substack{1|v-1 \\ x^{1/2}x_1^{-1} < 1 < x^{1/2}x_1}} \chi(1)$$

nach oben abgeschätzt werden. Wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, ist die Hooley-Bredikhinsche Methode nicht direkt zur Abschätzung dieser Summe anwendbar. Wir ersetzen daher die Summe Σ_B durch

$$\Sigma_{B'} = \sum_{1 < v \leq x} b_1(v) \sum_{\substack{1|v-1 \\ x^{1/2}x_1^{-1} < 1 < x^{1/2}x_1}} \chi(1),$$

wobei die Funktion $b_1(\cdot)$ wie folgt definiert ist.

$$b_1(v) := \begin{cases} 1, & \text{genau dann, wenn } v \text{ in der Form } v = nm^2 \\ & \text{darstellbar ist, wobei } n \text{ keinen Primteiler} \\ & \text{kongruent } 3 \pmod{4} \text{ besitzt, } m \leq \ln^A x \text{ und} \\ & m \in \mathbb{D}_3 \text{ ist.} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich ist $b_1(v) \leq b^*(v).$ *)

) $b^(\cdot)$ wurde in Abschnitt 4.1 definiert.

Es ist für positives $\epsilon < 1/2$

$$\Sigma_{B'} = \Sigma_B + \sum_{\substack{1 < v \leq x \\ v = nm^2 \\ p|n \Rightarrow p \not\equiv 3 \pmod{4} \\ m \in \mathfrak{D}_3 \\ \ln^A x < m < x^\epsilon}} \sum_{\substack{1|v-1 \\ x^{1/2}x_1^{-1} < 1 < x^{1/2}x_1}} \chi(1)$$

(4.3.1)

$$+ \sum_{\substack{1 < v \leq x \\ v = nm^2 \\ p|n \Rightarrow p \not\equiv 3 \pmod{4} \\ m \in \mathfrak{D}_3 \\ x^\epsilon \leq m \leq x^{1/2}}} \sum_{\substack{1|v-1 \\ x^{1/2}x_1^{-1} < 1 < x^{1/2}x_1}} \chi(1)$$

$$= \Sigma_B + \Sigma_1 + \Sigma_2$$

Verwendet man die Abschätzung

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv -1 \pmod{k}}} d(n) \ll \frac{x}{k} \ln x,$$

die im Bereich $k \leq x^{1/4}$ richtig ist, so folgt

$$\Sigma_1 \ll \sum_{\substack{\ln^A x < m < x^\epsilon \\ n \leq x \\ n \equiv -1 \pmod{m^2}}} d(n)$$

$$\ll \frac{x}{\ln^2 x}.$$

Mit $\epsilon > \epsilon' > 0$ gilt weiter

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\ll_{\epsilon'} x^{\epsilon'} \\ x^{\epsilon} &\leq m \leq x^{1/2} \\ n &\leq \frac{x}{m^2} \\ &\ll \frac{x}{\ln^2 x} \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, daß es genügt, die Summe Σ_B weiter abzuschätzen, da Restglieder der Größenordnung $x \ln^{-2} x$ im Restglied des Satzes 3 aufgehen. Mit den Funktionen $F(\cdot)$ und $D(\cdot)$ aus Abschnitt 2.4 folgt nun

$$\begin{aligned} \Sigma_B &\ll \left(\sum_{\substack{1 < v \leq x \\ D(v-1) \neq 0}} b_1(v) \right)^{1/2} \left(\sum_{1 < v \leq x} b_1(v) F(v-1)^2 \right)^{1/2} \\ (4.3.2) \quad &= O \left((\Sigma_D)^{1/2} (\Sigma_E)^{1/2} \right) \end{aligned}$$

Zur Abschätzung von Σ_D führen wir wieder einige Abkürzungen für die Summationsbedingungen ein.

$$(L_1) \equiv \{ l_1 \mid x^{1/2} x_1^{-1} < l_1 < x^{1/2} x_1 \}$$

$$(L_2) \equiv \{ l_2 \mid x^{1/2} (x_1 \ln^2 x)^{-1} < l_2 < x^{1/2} x_1 \}$$

$$(v) \equiv \{ v \mid v - 1 = l_1 \cdot l_2 \}.$$

Mit den entsprechenden Überlegungen wie bei (2.4.4) bis (2.4.6) erhalten wir

$$\Sigma_D = \sum_{\substack{1 < v \leq x \\ (L_1), (L_2), (v) \\ \Omega(v-1) \leq 10 \ln \ln x}} b_1(v) + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$$

Setzen wir nun wieder

$$R_x = \left\{ m \leq x \mid p \mid m \Rightarrow p \leq x^{\frac{1}{20 \cdot \ln \ln x}} \right\},$$

so folgt

$$\Sigma_D \ll \sum_{\substack{1 < v \leq x \\ v-1 \notin R_x \\ (L_1), (L_2), (v)}} b_1(v) + \frac{x}{\ln^2 x}.$$

Die Auswertung der Bedingung $v-1 \notin R_x$ zeigt, daß

$$\Sigma_D = O\left(\sum_{\substack{r < x \\ r = l_1 l_2 \\ l_1 < x^{1/2} x_1 \\ (L_2)}} 1 - \frac{1}{20 \ln \ln x} \sum_{\substack{1 < v \leq x \\ v-1 = r p}} b_1(v)\right) + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$$

(4.3.3)

$$\begin{aligned} &= O\left(\sum_{\substack{r < x \\ r = l_1 l_2 \\ l_1 \leq x^{1/2} x_1}} 1 - \frac{1}{20 \ln \ln x} \sum_{\substack{m \in \mathfrak{D}_3 \\ m \leq \ln^A x \\ (m, r) = 1}} \sum_{\substack{1 \leq \frac{x}{m^2} \\ r \cdot p + 1 = m^2 \cdot l \\ (l, p_3(x)) = 1}} 1\right) \\ &+ O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right). \end{aligned}$$

Die innere Summe in der zweiten Gleichung von (4.3.3) läßt sich nach Lemma 4.2 durch

$$O \left(\frac{x(\ln \ln x)^{1/2}}{r^m (\ln \frac{x}{r^m})^{3/2}} \right)$$

abschätzen. Nach Ausführung der Summation über m folgt

(4.3.4)

$$\Sigma_D = O \left(\frac{x(\ln \ln x)^{3/2}}{(\ln x)^{3/2}} \sum_{\substack{r \leq x \\ r = l_1 l_2 \\ l_1 < x^{1/2} x_1 \\ (L_2)}} \frac{1}{r} \right) + O \left(\frac{x}{\ln^2 x} \right)$$

Der Summe auf der rechten Seite von (4.3.4) entspricht aber die Summe Σ_0 aus Abschnitt 2.4 mit $d = 1$. Einsetzen der Abschätzung dieser Summe ergibt

$$(4.3.5) \quad \Sigma_D \ll \frac{x}{\ln^{1/2} x} \cdot \ln^{-\gamma} x \ln^{3\xi_0} x,$$

wobei γ wie in Abschnitt 2.4 gleich 0,0858 ist.

Sei

$$(L_i) \equiv \left\{ l_i \mid \frac{x^{1/2}}{x_1^d} < l_i < \frac{x^{1/2} x_1}{d} \right\} \quad \text{für } i = 1, 2$$

$$(H) \equiv \{(l_1, l_2) = 1\}.$$

Ersetzen wir in Σ_E die Funktion $b_1(\cdot)$ durch die Funktion $b^*(\cdot)$, so folgt mit den obigen Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 \Sigma_E &\leq \sum_{1 < v \leq x} b^*(v) F(v-1)^2 \\
 (4.3.6) \quad &= \sum_{\substack{1 < v \leq x \\ v-1=l_1 l_2 d m \\ (L_1), (L_2), (H)}} \chi^2(d) \chi(l_1) \chi(l_2) b^*(v) \\
 &= \sum_{d \geq x^{1/8}} + \sum_{d > x^{1/8}} = \Sigma_3 + \Sigma_4
 \end{aligned}$$

Mit Lemma 4.3 erhalten wir für Σ_3

$$\begin{aligned}
 \Sigma_3 &= B^*(x) x \sum_{(L_1), (L_2), (H)} \frac{\chi^2(d) \chi(l_1) \chi(l_2)}{d l_1 l_2} \prod_{\substack{p \mid l_1 l_2 d \\ p \equiv 3 \pmod{4}}} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \\
 &\quad + O\left(\frac{x}{\ln^{10} x} \sum_{d, l_1, l_2 < x} \frac{1}{d l_1 l_2}\right) \\
 &= B^*(x) x \Sigma_5 + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).
 \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
 \Sigma_5 &= \sum_{(L_1)} \frac{\chi(d) \chi(l_1)}{d \cdot l_1} \prod_{\substack{p \mid d \cdot l_1 \\ p \equiv 3 \pmod{4}}} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot \\
 &\quad x^{1/8} \leq d \leq \frac{x^{1/2}}{x_1 \ln^5 x} \\
 &\quad \cdot \sum_{(L_2), (H)} \frac{\chi(l_2)}{l_2} \prod_{\substack{p \mid l_2 \\ p \nmid d \cdot l_1 \\ p \equiv 3 \pmod{4}}} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \\
 &\quad + O(\ln \ln x \ln^{3\xi_0} x)
 \end{aligned}$$

Lemma 4.4 gibt

$$\Sigma_5 \ll \frac{\ln \ln x}{\ln^3 x} + \ln \ln x \cdot \ln^{3\xi_0} x,$$

also

$$(4.3.7) \quad \Sigma_3 \ll \frac{x \ln^{4\xi_0} x}{\ln^{1/2} x}$$

Ähnliche Überlegungen wie bei (2.4.23) bis (2.4.26) zeigen, daß es bei der Auswertung von Summe Σ_4 auf die Abschätzung von

(4.3.8)

$$\begin{aligned} ru^2 dm < x^{3/4} x_1 & \quad \left| \quad \sum_{\substack{v=1+\lambda \pmod{4\lambda} \\ y_1 \leq v \leq y_2}} b^*(v) - \sum_{\substack{v=1+3\lambda \pmod{4\lambda} \\ y_1 \leq v \leq y_2}} b^*(v) \right| \\ (R) \quad u, d < x^{1/8} & \end{aligned}$$

ankommt. Hierbei wurden

$$\lambda = ru^2 dm, (R) \equiv \left\{ r \mid \frac{x^{1/2}}{udx_1} < r < \frac{x^{1/2} x_1}{ur} \right\}$$

$$y_1 = \min \{x, \max \{1 + rux_1^{1/2} x_1 m, 1\}\}$$

und

$$y_2 = \min \{x, \max \{1 + rux_1^{1/2} x_1^{-1}, 1\}\}$$

gesetzt.

Benutzt man nun die asymptotische Gleichung aus Lemma 4.3, so erhält man für die Summe in (4.3.8) als obere Abschätzung $O(x \ln^{-2} x)$ und damit

$$(4.3.9) \quad \Sigma_4 \ll \frac{x}{\ln^2 x}.$$

(4.3.6), (4.3.7) und (4.3.9) zusammengefaßt ergeben

$$(4.3.10) \quad \Sigma_E \ll \frac{x \ln^{4\epsilon_0} x}{\ln^{1/2} x}.$$

4.4 Herleitung von Satz 3

Mit (4.3.1), (4.3.2), (4.3.5) und (4.3.10) erhalten wir, wenn ξ_0 hinreichend klein gewählt ist,

$$(4.4.1) \quad \Sigma_B \ll \frac{x}{\ln^{1/2+\lambda} x}$$

mit $\lambda = 0,042$.

Faßt man in (4.2.1) die Produkte C_1 und C_2 zu einer Konstanten C zusammen, so folgt mit (1.2.6), (4.2.1), (4.2.2) und (4.4.1) die behauptete asymptotische Formel für Satz 3 .

Es ist zu bemerken, daß mit der Hölderschen Ungleichung aus Satz 3 ohne große Rechnung eine untere Abschätzung für B -Zwillinge folgt, die allerdings noch weiter von der wahren Größenordnung entfernt ist, als die im Korollar zu Satz 3 gegebene. Bei dem Beweis des Korollares zu Satz 3 wird ebenfalls die Höldersche Ungleichung, aber zusätzlich noch spezielle Eigenschaften der auftretenden multiplikativen Funktionen und Siebmethoden verwendet.

V Beweis von Satz 5

Bezeichnet man mit $r^*(k)$ die Zerlegungsanzahl der natürlichen Zahl k in eine Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen, so gilt nach Jacobi

$$r^*(k) = \begin{cases} 8 \sigma(k), & \text{falls } (k, 2) = 1 \\ 24 \sigma(k'), & \text{falls } k = 2^l k', \quad l > 0, \quad (k', 2) = 1. \end{cases}$$

Wir erhalten also für $B(k; m_1, \dots, m_r)$ die Darstellung

$$B(k; m_1, \dots, m_r) = r^*(k) r^*(km_1 + 1) \dots r^*(km_r + 1)$$

und weiter

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq x} B(k; m_1, \dots, m_r) &= \\ &= 24 \cdot 8^r \sum_{l=1}^N \sum_{\substack{u \leq x/2^l \\ (u, 2) = 1}} \sigma(u) \sigma(2^l u m_1 + 1) \dots \sigma(2^l u m_r + 1) \\ &\quad + 8 \sum_{\substack{u \leq x \\ (u, 2) = 1}} \sigma(u) r^*(u m_1 + 1) \dots r^*(u m_r + 1) \\ &= 24 \cdot 8^r \sum_{l=1}^N I(1) \quad + \quad 8 \sum_2^* \end{aligned}$$

wobei $N = \left[\frac{\ln x}{\ln 2} \right]$ gesetzt wurde.

Die asymptotischen Formeln für $I(1)$ und Σ^* formulieren wir in den folgenden Lemmata

Lemma 5.1. Sei $a = 2^l$ mit einer positiven ganzen Zahl l . Dann gilt

(5.1)

$$\begin{aligned} I(a, y) &= \sum_{\substack{u \leq y \\ (u, 2) = 1}} \sigma(u) \sigma(aum_1+1) \dots \sigma(aum_r+1) = \\ &= C_1(a, m_1, \dots, m_r) a^r y^{r+2} \prod_{i=1}^r m_i + \\ &+ O_{(m_1, \dots, m_r)}(a^r y^{r+1} (\ln ay)^{r+1}) \end{aligned}$$

wobei $C_1(a, m_1, \dots, m_r)$ eine positive Konstante ist.

Bemerkung: Die Abhängigkeit der 0-Konstante von $m_1, \dots, m_r$ ergibt sich unmittelbar aus dem Beweis.

Für die Summe Σ^* erhalten wir folgendes Resultat

Lemma 5.2. Es ist

$$\begin{aligned} (5.2) \quad \sum_{\substack{u \leq y \\ (u, 2) = 1}} \sigma(u) r(u m_1 + 1) \dots r(u m_r + 1) &= \\ &= 8^{r'} 2^{4^{r-r'}} C_2(m_1, \dots, m_r) y^{r+1} + \\ &+ O_{(m_1, \dots, m_r)}(y^{r+1} \ln y)^{r+1}, \end{aligned}$$

wobei C_2 eine positive Konstante und r' die Anzahl der geraden m_j ist.

Nun zum Beweis von Lemma 5.1.

Sei

$$g_a(z) = z (azm_1 + 1) \dots (azm_r + 1)$$

mit $z \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\sum_{\substack{u \leq y \\ (u, 2) = 1}} \sigma(u) \sigma(au_{m_1+1}) \dots \sigma(au_{m_r+1})$$

$$(5.3) = \sum_{d_0 \leq y} \frac{1}{d_0} \sum_{d_1 \leq aym_1+1} \frac{1}{d_1} \dots \sum_{d_r \leq aym_r+1} \frac{1}{d_r}$$

$$\begin{aligned} 0 < v \leq [2, d_1, \dots, d_r] & \quad \sum_{u \leq y} g_a(u) = \sum_{d_i, v} \Sigma_I . \\ v \equiv 0 \pmod{d_0} & \quad u \equiv v \pmod{[2, d_0, \dots, d_r]} \\ aym_i+1 \equiv 0 \pmod{d_i} & \\ i = 1, \dots, r & \\ (v, 2) = 1 & \end{aligned}$$

Für die Summe Σ_I über u erhält man mit einer Folgerung aus der Eulerschen Summenformel

$$\Sigma_I = \frac{1}{[2, d_0, \dots, d_r]} \int_1^y g_a(v) dv + O(g_a(y)).$$

Setzt man dies in (5.3) ein, so folgt

$$I(a, y) = \sum_{d_0 \leq y} \frac{1}{d_0} \sum_{d_1 \leq a y m_1 + 1} \frac{1}{d_1} \cdots \sum_{d_{r-1} \leq a y m_{r-1} + 1}$$

$$\begin{aligned} 0 < v &\leq \sum_{[2, d_0, \dots, d_{r-1}]} \frac{1}{d_{r-1} [2, d_0, \dots, d_{r-1}]} \\ v &\equiv 0 \pmod{d_0} \\ a v m_i + 1 &\equiv 0 \pmod{d_i} \\ i &= 1, \dots, r-1 \\ (v, 2) &= 1 \end{aligned}$$

$$(5.4) \quad \sum_{d_r \leq a y m_r + 1} \sum_{\substack{0 < \mu \leq d_r \\ a \mu m_r + 1 \equiv 0 \pmod{d_r} \\ \mu \equiv v \pmod{(d_r, [2, d_0, \dots, d_{r-1}]}} \frac{([2, d_0, \dots, d_{r-1}], d_r)}{d_r^2}$$

$$\int_1^y g_a(v) dv +$$

$$+ \sum_{d_0 \leq y} \frac{1}{d_0} \sum_{d_1 \leq a y m_1 + 1} \frac{1}{d_1} \cdots \sum_{d_r \leq a y m_r + 1} \frac{1}{d_r}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{0 < v \leq [2, d_0, \dots, d_r] \\ v \equiv 0 \pmod{d_0} \\ a y m_i + 1 \equiv 0 \pmod{d_i} \\ i = 1, \dots, r \\ (v, 2) = 1}} O(g_a(y)) \approx \end{aligned}$$

$$= \int_1^y g_a(v) dv + O(g_a(y) \Sigma_2).$$

Wegen

$$([2, d_0, \dots, d_{r-1}], d_r) = ([2, d_1, \dots, d_{r-1}], d_r) \prod_{i=1}^{r-1} (m_i - m_r)$$

konvergiert die innere Summe in Σ_1 für $d_r=1$ bis Unendlich.

Die Summe für $d_r \leq a y m_r + 1$ liefert

$$C(d_0, \dots, d_{r-1}, a) + O\left(\frac{1}{y}\right),$$

wobei $C(d_0, \dots, d_{r-1}, a) = O_{(m_1, \dots, m_r)}(1)$. Wiederholte Anwendung dieses Beweisschrittes ergibt

$$(5.5) \quad \Sigma_1 = C'_1 + O_{(m_1, \dots, m_r)}\left(\frac{1}{y}\right),$$

mit einer positiven Konstante $C'_1 = C'_1(m_1, \dots, m_r, a)$, die durch eine von a unabhängige Konstante nach oben abgeschätzt werden kann. (Wir erinnern daran, daß $a = 2^1$ gesetzt wurde.)

Eine ähnliche Rechnung zeigt, daß

$$(5.6) \quad \Sigma_2 = O_{(m_1, \dots, m_r)}((\ln ay)^{r+1}).$$

(5.4) - (5.6) ergeben zusammengefaßt die Behauptung von Lemma 5.1.

Beweis von Lemma 5.2.

Seien nach entsprechender Umnummerierung $m_1, \dots, m_{r'}$ gerade und $m_{r'+1}, \dots, m_r$ ungerade. Weiter sei für natürliches n

$$\sigma^*(n) = \sum_{\substack{d|n \\ (d,2)=1}} d.$$

Hiermit erhalten wir

$$\begin{aligned} \Sigma^* &= \sum_{\substack{d \leq y \\ (d,2)=1}} \sigma(u) r^*(um_1+1) \dots r^*(um_r+1) \\ &= 8^{r'} 2^{4^{r-r'}} \sum_{\substack{u \leq y \\ (d,2)=1}} \sigma^*(u) \sigma^*(um_1+1) \dots \sigma^*(um_r+1). \end{aligned}$$

Ein ähnlicher Beweis wie im Lemma 5.1 ergibt die Behauptung von Lemma 5.2.

Die Behauptung des Satzes 5 erhält man, indem man die Ergebnisse von Lemma 5.1 mit $y = \frac{x}{2^1}$ und Lemma 5.2 in (5.1) einsetzt.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] E.Bombieri "On the large sieve", Mathematika, 12(1965), 201-225
- [2] B.M.Bredikhin "Indefinite binary additive problems, II. The analogue of the Hardy-Littlewood problem", Izv.Akad.Nauk SSSR, Ser.Mat. 27(1963), 577-612
- [3] ——— "The dispersion method and binary additive problems", see Russ.Math.Surveys, 20(2), March-April (1965), 85-126
- [4] S.Chowla, "The representation of a number as a sum of four squares and a prime", Acta Arithmetica 1 (1935), 115-122
- [5] P.D.T.A.Elliott, H.Halberstam "Some applications of Bombieri's theorem", Mathematika, 13 (1966), 196-203.
- [6] P.Erdős, "Über eine asymptotische Ungleichung in der Zahlentheorie" (russisch), Vestnik LGU, 13 (1960), 41-49
- [7] T.Estermann "Proof that every large integer is the sum of two primes and a square", Proc.London Math.Soc., Ser.2, 42 (1936), 501-506
- [8] F.Fricker "Eine Beziehung zwischen der hyperbolischen Geometrie und der Zahlentheorie", Math.Ann., 191 (1971), 292-312
- [9] M.Gottschalk "Über die Anzahl der Darstellungen von Primzahlen in einer arithmetischen Progression als Summe zweier Quadrate und einer ganzen Zahl", Diplomarbeit, Frankfurt (1972)
- [10] ——— "Über die Lösungsanzahl eines diophantischen Gleichungssystems", Archiv der Mathematik, Vol XXV (1974), 488-491
- [11] ——— "Ein binäres additives Problem", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 286/287 (1976), 86-100
- [12] ——— und K.-H.Indlekofer "Über binäre additive Probleme", eingereicht bei Journal für die reine und angewandte Mathematik

- [13] H.Halberstam "On the representation of large numbers as sums of squares, higher powers und primes", Proc.London Math. Soc.,Ser.2, 53(1951) 363-380
- [14] G.H.Hardy and J.Littlewood "Some problems of partitio numerorum III. On the expression of a number as a sum of primes", Acta Math., 44 (1922), 1-70
- [15] ——— , ——— "Some problems of partitio numerorum V. A further contribution to the study of Goldbach's problems", Proc.London Math. Soc., Ser.2, 22 (1923), 46-56
- [16] C.Hooley "On the representation of a number as the sum of two squares and a prime", Acta Math., 97 (1957), 189-210
- [17] K.-H.Indlekofer "Scharfe untere Abschätzung für die Anzahlfunktion der B-Zwillinge", Acta Arith., 26 (1974), 207-212
- [18] I.Kátaí "On an application of the large sieve: Shiftet prime numbers which have no prime divisors from a given arithmetical progression", Acta Mathematica, Academiae Scientiarum Hungaricae, XXI,1-2(1970)151-173
- [19] Yu.V.Linnik "An asymptotic formula in the Hardy-Littlewood additive problem", Izv.Akad.Nauk SSSR, Ser. Mat., 24(1960), 629-706 .
- [20] ——— "The Dispersion Method in Binary Additive Problems", Translations of Math.Monographs, Vol 4 chapter VI
- [21] A.A.Poljanskiĭ "An analogue of the Hardy-Littlewood Equation, Dokl.Akad.Nauk SSSR 180(1968), 29-31
- [22] K.Prachar "Primzahlverteilung", Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer 1957
- [23] W.Schwarz "Einführung in Siebmethoden der analytischen Zahlentheorie", B.I Wissenschaftsverlag, Zürich 1974
- [24] H.Siebert, D.Wolke "Über einige Analoga zum Bombierischen Primzahlsatz", Math.Z. 122 (1971),327-341
- [25] G.K.Stanley "On the representation of numbers as a sum of squares and primes", Proc.London Math.Soc. (2), 29 (1928), 122-144

- [26] A.Walfisz "Zur additiven Zahlentheorie", Acta
Arithmetica, 1 (1935), 123-132
- [27] E.Wirsing "Das asymptotische Verhalten von Summen
über multiplikative Funktionen", Math.
Ann., 143 (1961), 75-102
- [28] D.Wolke "Über die mittlere Verteilung der Werte
zahlentheoretischer Funktionen auf Rest-
klassen I", Math. Ann., 202 (1973), 1-25
- [29] ——— "Über das summatorische Verhalten zahlen-
theoretischer Funktionen", Math. Ann.,
194 (1971), 147-166

Lebenslauf

Manfred Gottschalk	6234 Hattersheim 2, Hochheimerstr. 1
Geburtstag	2. August 1948
Geburtsort	Frankfurt-Höchst
Familienstand	ledig
Bildungsgang	1955 - 59 Volksschule in Eddersheim
	1959 - 65 Realschule in Flörsheim
	1965 - 67 Liebig - Gymnasium in Frankfurt
	1967 Abitur
	1967 - 72 Studium der Mathe- matik und Physik an der Universität Frankfurt
	1969 Diplom-Vorprüfung
	1972 Diplom-Hauptprüfung für Mathematik (Nebenfach Physik)

Vom 15. Juli 1970 bis zum 31. Juli 1972 wissenschaftliche
Hilfskraft an der Universität Frankfurt. 1. August 1972 bis
30. September 1973 wissenschaftlicher Angestellter an der
Universität Freiburg. Seit 1. Oktober 1973 wissenschaft-
licher Angestellter an der Universität Frankfurt.

Meine akademischen Lehrer waren

Prof. Dr. F.-W. Bauer, Prof. Dr. G. Burde, Prof.
Dr. H. Dinges, Prof. Dr. B. Fischer, Prof. Dr.
W. Franz, Prof. Dr. W. Greiner, Prof. Dr. K.-H.
Indlekofer, Prof. Dr. G. Köthe, Prof. Dr. R. Kulze,
Prof. Dr. R. Moufang, Prof. Dr. H.-J. Queisser,
Prof. Dr. W. Schwarz, Prof. Dr. F. Stummel,
Prof. Dr. J. Weidmann.

